
SIGILLVM ACADEMIÆ HARVARDIANÆ IN NOV: ANG:
CHRISTO ET ECCLESIÆ

Sammlung von Aufgaben

aus

der algebraischen Analysis.

Bearbeitet

von

Johann Lieblein,

a. o. Professor am Polytechnikum zu Prag.

c'

Prag,

Verlag von H. Carl J. Satow.

1867.

LEIPZIG,
DRUCK VON GIESECKE & DEVRIENT.

Vorrede.

Die Herausgabe einer „Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis“ findet wohl ihre genügende Rechtfertigung in dem regen Interesse, welches diesem Theile der mathematischen Wissenschaft bisher zugewendet wurde, und in neuerer Zeit zur Aufnahme desselben als selbständigen Lehrstoff an höheren Lehranstalten geführt hat.

Auch an dem polytechnischen Institute zu Prag findet diese Disciplin ihre Vertretung in speciellen mir überwiesenen Vorträgen, und dieser Umstand ist es auch, welcher mir schon oft den bisherigen Mangel eines derartigen Hilfsbuches fühlbar machte, und mich deshalb bestimmte, die eben so mühsame als wenig dankbare Bearbeitung der obengenannten Aufgabensammlung vorzunehmen.

Dem Unterrichtsbedürfnisse entsprungen, soll das Buch zunächst diesem dienen; doch wird auch einem tiefer gehenden Studium der algebraischen Analysis in zahlreichen Theoremen und schwierigeren Problemen hinlänglich Stoff und Anregung geboten. Bei der Anlage des Buches war für mich das anerkannt treffliche „Handbuch der algebraischen Analysis von Dr. Oskar Schlömilch“ bestimmend. Dem entsprechend enthält die „Sammlung“ zu jedem Capitel dieses Lehrbuches — mit Ausnahme eines einzigen — eine Reihe geordneter Beispiele und Aufgaben, mit nur kurzen Andeutungen zur Lösung der schwierigeren, dagegen die nöthigen Erläuterungen zu jenen Aufgaben und Theoremen, welche gleichsam Ergänzungen des im Schlömilch'schen Werke

behandelten Stoffes bilden. Was die von mir benützten Quellen anbelangt, so habe ich vor Allem der zahlreichen einschlägigen Aufsätze in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathematik, Schlömilch's Zeitschrift für Mathematik und Physik, Grunert's Archiv für Mathematik und Physik, *Nouvelles annales de mathématiques* und Liouville's *Journal de mathématiques* und des klassischen Euler'schen Werkes *Introductio in analysin infinitorum* zu gedenken. Die Arbeiten von Gelehrten, wie Arndt, Bessel, Bertrand, Betti, Bonnet, Catalan, Cauchy, Clausen, Dienger, Eisenstein, Euler, Gauss, Hankel, Heine, Jacobi, Lagrange, Möbius, Prouhet, William Roberts (Strebor), Schellbach, Schlömilch, Stern, Waring, Werner und Whitworth finden in der „Sammlung von Aufgaben aus der algebraischen Analysis" ihre Vertretung.

Diese Berücksichtigung zahlreicher Originalarbeiten ist es auch, welche mich zu der Hoffnung ermuthigt, dem Buche werde die Theilnahme des mathematischen Publikums nicht fehlen.

Prag im April 1867.

Johann Lieblein.

Inhalt.

Berichtigungen.

S. 1, Aufg. 4, Z. 1 statt $(x+y+y)^{2n+1}$ lies: $(x+y+z)^{2n+1}$.
S. 4, A. 40, Z. 4 statt Variable mit l. Variable, eine einzige ausgenommen, mit.
S. 5, A. 61 statt by l. b.
S. 8, A. 47, Z. 1 statt $\operatorname{arctang}\frac{y}{b}$ l. $\operatorname{arcsec}\frac{y}{b}$.
S. 8, A. 47, Z. 2 statt $\arccos\frac{y}{b}$ l. $\arccos\sqrt{\frac{y}{b}}$.
S. 9, A. 52, Z. 1 statt $1-4a^2+4a^2y^2-4y^2$ l. $1-2a^4+4a^2y^2-2y^4$.
S. 9, A. 52, Z. 2 statt $-2\operatorname{arcsec}\sqrt{1+b^4}$ l. $=2\operatorname{arcsec}\sqrt{1+b^4}$.
S. 9, A. 54, Z. 1 statt 47851 l. 47881.
S. 10, A. 9 statt $a\omega^n$ l. $(a\omega)^n$.
S. 10, A. 14 statt $\sqrt{a^2+\delta^2}$ l. $\sqrt{1+\delta^2}$.
S. 13, A. 57 statt $(\cos\delta+\arcsin\delta)^{\cos\delta}$ l. $(\cos\delta+\arcsin\delta)^{\cot\delta}$.
S. 13, A. 59 statt $c^{(1+\delta)^n}-1$ l. $c^{(1+\delta)^n-1}$.
S. 14, A. 66 statt $2(n-1)a$ l. $2(n-1)$.
S. 16, A. 82, Z. 5 statt $f(a+1)\,f(a+2)$ l. $f(a+1)+f(a+2)$.
S. 17, A. 19 statt $\sin[\arcsin(3x-x^2)]$ l. $\sec[\arcsin(3x-x^2)]$.
S. 17, A. 20 statt $\cos[\arccos(10x+5x^2)]$ l. $\operatorname{cosec}[\arccos(10x+5x^2)]$.
S. 20, A. 53, Z. 3 statt $\arctan x$ l. $\arctan\frac{1}{x}$.
S. 20, A. 7 statt $(\overline{\sqrt[n+1]{a}-1})(\overline{\sqrt[n-1]{a}-1})$ l. $(\sqrt[n+1]{a}-1)(\sqrt[n-1]{a}-1)$.
S. 50, A. 264, Z. 5 statt die Einheit l. der Einheit.
S. 50, A. 264, Z. 8 statt α_n l. α_r.
S. 50, A. 265, Z. 4 statt α_n l. α_r.
S. 65, A. 9 statt $x\sin\varphi$ l. $px\sin\varphi$.
S. 65, A. 10 statt $x\cos\varphi$ l. $1-px\cos\varphi$.
S. 67, A. 33, Z. 1 statt Reihe, deren l. Reihe $1+\ldots$, deren.
S. 67, A. 34, Z. 2 statt Reihe und l. Reihe $1+2x+\ldots$ und.
S. 67, A. 35, Z. 1 statt Reihe von l. Reihe $1-11x+\ldots$ von.
S. 67, A. 37, Z. 3 statt $-34x^{14}$ l. $-31x^{14}$.
S. 67, A. 39, Z. 1 statt Reihe besitzen l. Reihe $1+\ldots$ besitzen.

S. 70, A. 58, Z. 2 statt $\left[\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{(\sqrt{1-x^2}+1)^m}-\frac{\sqrt{1-x^2}+1}{(\sqrt{1-x^2}+1)^m}\right]\frac{x^{2m}}{2}$ lies

$\left[\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{(1-\sqrt{1-x^2})^m}-\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{(1+\sqrt{1-x^2})^m}\right]\frac{x^{2m}}{2}$.

S. 79, A. 78, Z. 4 statt $(1-2\cos 2\alpha+x^2)(1-x^2)$ lies

$(1-2x.\cos 2\alpha+x^2)(1-x)^2$.

S. 81, A. 91, Z. 2 statt $\cos x$ l. $\sin x$

S. 86, A. 108) *f*) statt $\frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^9}+\ldots$ lies

$$\begin{array}{l} \frac{1}{3^3}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{3^7}+\frac{1}{3^9}+\cdots \\ -\frac{1}{5^3}-\frac{1}{5^5}-\frac{1}{5^7}-\frac{1}{5^9}-\cdots \\ +\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}+\frac{1}{7^7}+\frac{1}{7^9}+\cdots \\ -\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots\quad\vdots \end{array}$$

S. 94, Z. 6 v. o. statt $(n+1)r+1$ l. $(n+1)ar+1$.

S. 98, A. 64, Z. 3 statt $\frac{\alpha\beta}{1}x$ l. $\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x$.

S. 98, A. 64, Z. 4 statt $F(\alpha, \beta, x)$ l. $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

S. 99, A. 1, Z. 6 statt reell sein l. reell und positiv sein.

S. 101, A. 15, Z. 5 statt $\frac{2^m+(1+i)^m-(1-i)^m}{4}$ l. $\frac{2^m i+(1+i)^m-(1-i)^m}{4i}$.

S. 101, A. 15, Z. 8 statt $\frac{2^m i+(1+i)^m+(1-i)^m}{4i}$ l. $\frac{2^m+(1+i)^m+(1-i)^m}{4}$.

S. 104, A. 23, Z. 3 statt $(1-q^{\gamma-1})$ l. $(1-q^{\gamma+1})$.

S. 105, Z. 5 v. o. statt q^2z l. q^2z^2.

S. 122, A. 48, Z. 3 statt $-\frac{1}{2}(34, 34, 34, \ldots)$ l. $-\frac{1}{12}(34, 34, 34, \ldots)$.

S. 126, Z. 5 v. o. statt $\varphi(\alpha+1, \beta, \gamma, q, x)$ l. $\varphi(\beta+1, \alpha, \gamma, q, x)$.

S. 135, Z. 3 v. u. statt Themas l. Theorems.

S. 135, Z. 8 v. u statt 91) bis 96) conv. l. 91) div. 92) bis 96) conv.

S. 136, A. 130, Z. 1 statt $-\frac{1}{2}<0$, so diver. l. $+\frac{1}{2}>0$, so conver.

S. 136, Z. 5 v. u. statt 5. Heft l. 9, Jahrg. 5. Heft.

S. 144, Z. 1 v. u. statt $[a_{n-1}]^{n-1}$ l. $[a_{n-1}][x]^{n-1}$.

I. Ueber die verschiedenen Arten von Funktionen.

1) Wie viele Glieder besitzt eine ganze rationale Funktion von n Variablen und der r^{ten} Ordnung?
   a) wenn sie vollständig ist,
   b) wenn ihr alle durch x^p theilbare Glieder fehlen,
   c) wenn ihr alle durch x^p und y^q theilbare Glieder fehlen.

2) Für welchen Werth von a übergeht die gebrochene Funktion $\frac{x^3+y^3+z^3-axyz}{x+y+z}$ in eine ganze?

3) Unter welcher Bedingung wird die gebrochene Funktion $\frac{x^p+2x^{p-q}y^q+y^p}{(x+y)^2}$ zu einer ganzen?

4) Man beweise, dass $\frac{(x+y+y)^{2n+1}-x^{2n+1}-y^{2n+1}-z^{2n+1}}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ eine ganze Funktion ist.

5) Wenn m und n positive ganze Zahlen und relativ prim zu einander sind, so ist $\frac{x^{m(n-1)}+x^{m(n-2)}+x^{m(n-3)}+\ldots\ldots+x^m+1}{x^{n-1}+x^{n-2}+x^{n-3}+\ldots\ldots+x+1}$ eine ganze Funktion.

Folgende Ausdrücke sind als ganze homogene und symmetrische Funktionen der in ihnen vorkommenden Variablen darzustellen.

6) $\frac{x^2}{x-y}+\frac{y^2}{y-x}$

7) $\frac{x^3}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^3}{(y-x)(y-z)}+\frac{z^3}{(z-x)(z-y)}$

8) $\frac{x^4}{(x-y)(x-z)(x-t)}+\frac{y^4}{(y-x)(y-z)(y-t)}+$
$+\frac{z^4}{(z-x)(z-y)(z-t)}+\frac{t^4}{(t-x)(t-y)(t-z)}$

9) $\frac{(xy)^2}{(x-z)(y-z)} + \frac{(xz)^2}{(x-y)(z-y)} + \frac{(yz)^2}{(y-x)(z-x)}$

10) $\frac{(xy)^3}{(x-z)(x-t)(y-z)(y-t)} + \frac{(xz)^3}{(x-y)(x-t)(z-y)(z-t)} +$
$+ \frac{(xt)^3}{(x-y)(x-z)(t-y)(t-z)} + \frac{(yz)^3}{(y-x)(y-t)(z-x)(z-t)} +$
$+ \frac{(yt)^3}{(y-x)(y-z)(t-x)(t-z)} + \frac{(zt)^3}{(z-x)(z-y)(t-x)(t-y)}$

11) $\frac{(xyz)^2}{(x-t)(y-t)(z-t)} + \frac{(xyt)^2}{(x-z)(y-z)(t-z)} +$
$+ \frac{(xzt)^2}{(x-y)(z-y)(t-y)} + \frac{(yzt)^2}{(y-x)(z-x)(t-x)}$

12) Man beweise, dass der Ausdruck
$2x_1 x_1 + 2x_2(x_1 + x_2) + 2x_3(x_1 + x_2 + x_3) + \ldots\ldots +$
$+ 2x_n(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$
eine symmetrische Funktion der Grössen $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ ist.

13) Es ist nachzuweisen, dass
$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + (x_1 + x_2) x_3 (x_1 + x_2 + x_3) +$
$+ \ldots\ldots (x_1 + x_2 + \ldots x_{n-1}) x_n (x_1 + x_2 + \ldots x_n)$
eine symmetrische Funktion ist.

Man beweise ferner, dass folgende Ausdrücke symmetrische Funktionen der Grössen $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots$ sind:

14) $\frac{x_1}{a(a+x_1)} + \frac{x_2}{(a+x_1)(a+x_1+x_2)} + \frac{x_3}{(a+x_1+x_2)(a+x_1+x_2+x_3)} +$
$+ \ldots\ldots + \frac{x_n}{(a+x_1+\ldots+x_{n-1})(a+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)}$

15) $1 - \frac{A}{x_1} + \frac{A(A-x_1)}{x_1 x_2} - \frac{A(A-x_1)(A-x_2)}{x_1 x_2 x_3} - \ldots\ldots -$
$- \frac{A(A-x_1)(A-x_2)\ldots\ldots(A-x_{n-1})}{x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_n}$

16) $\cos\frac{1}{2}(x_2 + x_3 - x_1) + \frac{2\sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_3}{2}\sin\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_1+x_2-x_3}{2}\right)}$

17) $\frac{\sin x_1}{\sin a \sin(a+x_1)} + \frac{\sin x_2}{\sin(a+x_1)\sin(a+x_1+x_2)} +$
$+ \frac{\sin x_3}{\sin(a+x_1+x_2)\sin(a+x_1+x_2+x_3} + \ldots\ldots +$
$+ \frac{\sin x_n}{\sin(a+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{n-1})\sin(a+x_1+x_2+\ldots\ldots x_n)}$

18) $$\frac{\sin x_1}{\cos a \cos(a+x_1)} + \frac{\sin x_2}{\cos(a+x_1)\cos(a+x_1+x_2)} +$$
$$+ \frac{\sin x_3}{\cos(a+x_1+x_2)\cos(a+x_1+x_2+x_3)} + \ldots\ldots +$$
$$+ \frac{\sin x_n}{\cos(a+x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1})\cos(a+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)}$$

19) $$\frac{\log\left(\frac{a+x_1}{a}\right)}{\log a \log(a+x_1)} + \frac{\log\left(\frac{a+x_1+x_2}{a+x_1}\right)}{\log(a+x_1)\log(a+x_1+x_2)} +$$
$$+ \frac{\log\left(\frac{a+x_1+x_2+x_3}{a+x_1+x_2}\right)}{\log(a+x_1+x_2)\log(a+x_1+x_2+x_3)} + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{\log\left(\frac{a+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n}{a+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_{n-1}}\right)}{\log(a+x_1+x_2\ldots\ldots+x_{n-1})\log(a+x_1+x_2+\ldots\ldots+x_n)}$$

20) Aus wie vielen und welchen Gliedern besteht die symmetrische Funktion $f(v, w, x, y, z)$, wenn in derselben $v^3 y z^2$ als Glied vorkömmt?

21) Aus wie vielen und welchen Gliedern besteht die symmetrische Funktion $f(u, v, x, y, z)$, wenn $u^3 x^2 y^2 z$ ein Glied derselben ist?

22) Es ist die Anzahl der Glieder zu finden, aus welcher die mförmige symmetrische Funktion $\Sigma(x_1^{\alpha} x_2^{\beta} x_3^{\gamma} \ldots\ldots x_m^{\mu}) = [\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \mu]$ der n Variablen besteht.

23) Man bestimme die Anzahl der Glieder, welche die symmetrische Funktion $[\alpha^{\alpha'} \beta^{\beta'} \gamma^{\gamma'} \ldots \mu^{\mu'}]$ enthält, wenn $\alpha' + \beta' + \gamma' \ldots \mu' = m$ ist.

Folgende heterogene Funktionen sind durch Einführung neuer Variablen in homogene zu verwandeln:

24) $y^5 + x^2 y + x y^3 + \frac{x^8}{y}$

25) $\frac{a}{x} + y + x y^2 + x^2 y^3 + x^4 y^5$

26) $\frac{a y}{x^2} + b x y^4 + c \sqrt{\frac{y^5}{x}}$

27) $\frac{a y^2}{x^2} + b y^8 x + \frac{c y^5}{\sqrt{x}}$

28) $\frac{a y}{x z} + b x y z + \frac{c z}{x y}$

29) $a y \sqrt{x} + b y \sqrt{z^3} + c \sqrt{x z^3}$

Folgende homogene Funktionen sind als Produkte aus Faktoren von der Form $\alpha x + \beta y$ darzustellen.

30) $a x^2 + b x y + c y^2$

31) $x^4 - (a^2 + b^2) x^2 y^2 + a^2 b^2 y^4$

32) $x^4 - 2a^2 x y^2 + (a^4 - b^4) y^4$

33) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 x^4 - 2a(\sqrt{a} + \sqrt{b}) x^2 y^2 + (a^2 - b^2) y^4$

34) $a^3 x^6 - 3a^2 x^4 y^2 + 3a x^2 y^4 - y^6$

35) $\dfrac{(a+b)^2 x^4 - 2(a+b)\sqrt{ab} . x^2 y^2 + a b y^4}{(a+b) x^2 + 2\sqrt{a+b} . \sqrt[4]{ab} . x y + \sqrt{ab} . y^2}$

36) $\dfrac{(a^2+b^2)^2 x^4 - 2ab x^2 y^2 + (a^2-b^2)^2 y^4}{x^2 - 2a x y + (a^2 - b^2) y^2}$

37) $\dfrac{x^4 - (ab + cd) x^2 y^2 + abcd y^4}{x^2 + (\sqrt{cd} - \sqrt{ab}) x y - \sqrt{abcd} . y^2}$

38) Wie viele Glieder enthält eine vollständige ganze rationale und homogene Funktion von n Variablen und m Dimensionen?

39) Wie viele m gliedrige ganze rationale und homogene Funktionen von r Dimensionen lassen sich aus n Variablen bilden, wenn

a) in jedem Gliede gleich viele Variable vorkommen sollen,

b) wenn diese besondere Bedingung nicht gestellt wird?

40) Wie viele Glieder enthält die ganze rationale und homogene Funktion von m Dimensionen und n Variablen, wenn die Funktion ihren Werth nicht ändert, indem man sämmtliche Variable mit entgegengesetzten Zeichen nimmt?

In folgende irrationale Funktionen ist eine neue Veränderliche z derart einzuführen, dass sowohl x als y rational durch z ausgedrückt werden:

41) $y = \sqrt[m]{(a + bx)^n}$

42) $y = \sqrt[m]{\left(\dfrac{a + bx}{c + dx}\right)^n}$

43) $y = A\left(\dfrac{a+bx}{c+dx}\right)^{\frac{m}{n}} + B\left(\dfrac{a+bx}{c+dx}\right)^{\frac{p}{q}} + C\left(\dfrac{a+bx}{c+dx}\right)^{\frac{r}{s}}$

44) $y = \dfrac{A_1 x^{\frac{a_1}{p_1}} + A_2 x^{\frac{a_2}{p_2}} + A_3 x^{\frac{a_3}{p_3}} + \ldots\ldots + A_n x^{\frac{a_n}{p_n}}}{B_1 x^{\frac{a_1}{q_1}} + B_2 x^{\frac{a_2}{q_2}} + B_3 x^{\frac{a_3}{q_3}} + \ldots\ldots + B_n x^{\frac{a_n}{q_n}}}$

45) $y = \sqrt{a + bx^2}$

46) $y = \sqrt{ax + bx^2}$

47) $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx)}$

48) $y = \sqrt{a^2 + (b + cx)(d + ex)}$

49) $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx) + e^2x^2}$

50) $y = \sqrt{(a + bx)(c + dx) + (e + fx)^2}$

51) Man führe in die Gleichung
$x^3 + y^3 - cxy = 0$
eine neue Variable z so ein, dass sowohl x als y rational durch z ausgedrückt werden.

52) Die durch die Gleichung
$ay^2 + bxy + cx^2 + dy + cx = 0$
verbundenen Variablen x und y sind als rationale Funktionen einer neuen Veränderlichen darzustellen.

53) Man drücke x und y rational durch eine neue Variable aus, wenn zwischen x und y die Gleichung
$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 + ey^2 + fxy + gx^2 = 0$
besteht.

54) Wenn zwischen x und y die Gleichung
$ay^3 + bxy^2 + cx^2y + dx^3 - ey - fx = 0$
besteht, so stelle man x und y als explicite Funktionen einer neuen Veränderlichen dar.

Aus folgenden Gleichungen sind x und y durch zweckmässige Substitution als entwickelte Funktionen einer neuen Veränderlichen z darzustellen.

55) $ay^3 + by^2x + cyx^2 + dx^3 = 2ey^2 + 2fyx + 2gx^2 + hy + ix$

56) $y^5 - 2ax^3 - by - cx = 0$

57) $y^{10} - 2ayx^6 - byx^3 - cy^4 = 0$

58) $ay^6 - bx^2y^2 + cx^2 = 0$

59) $y^4 - 2xy + 7 = 0$

60) $x^8 + 5y^4x^2 - 3y^3x = 0$

61) $x^4y^6 + ax^4y + by = 0$

II. Ueber cyclometrische Funktionen.

Man beweise folgende Formeln:

1) $\arcsin \frac{3}{5} + \arcsin \frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$

2) $\arcsin \frac{8}{17} + \arcsin \frac{15}{17} = \frac{\pi}{2}$

3) $\arcsin \frac{12}{37} + \arcsin \frac{35}{37} = \frac{\pi}{2}$

4) $\arcsin \frac{28}{53} + \arcsin \frac{45}{53} = \frac{\pi}{2}$

5) $2 \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

6) $6 \arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \arcsin \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} + \arccos \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{2}$

7) $\operatorname{arctang} (2 - \sqrt{3}) + \operatorname{arctang} (2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

8) $2 \operatorname{arctang}(\sqrt{2} - 1) + 2 \operatorname{arctang}(2 - \sqrt{3}) + \operatorname{arccot}(2 + \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

9) $\arcsin \frac{1}{2} + \operatorname{arctang} (2 - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$

10) $\operatorname{arctang} \frac{1}{2} + \operatorname{arctang} \frac{1}{5} + \operatorname{arctang} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

11) $8 \operatorname{arctang} \frac{1}{3} + 4 \operatorname{arctang} \frac{1}{7} = \pi$

12) $4 \operatorname{arctang} \frac{1}{5} - \operatorname{arctang} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

13) $\arcsin \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \arccos \frac{\sqrt{5}+1}{4} = 2 \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$

14) $\operatorname{arcsec} \frac{4}{\sqrt{5}-1} - \operatorname{arcsec} \frac{4}{\sqrt{5}+1} = \operatorname{arccosec} \frac{4}{\sqrt{5}+1}$

15) $\arcsin \sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin x$

16) $\arcsin \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 - 2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \arcsin x$

17) $\arccos \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2 - \sqrt{2 - \ldots\ldots - \sqrt{2}}}} = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n} \frac{\pi}{6}$

18) $\operatorname{arctang} d_1 + \operatorname{arctang} d_2 + \operatorname{arctang} d_3 + \ldots\ldots + \operatorname{arctang} d_n = \dfrac{\Sigma d d_1 - \Sigma d_1 d_2 d_3 + \Sigma d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 - \ldots\ldots}{1 - \Sigma d_1 d_2 + \Sigma d_1 d_2 d_3 d_4 - \ldots\ldots}$

Gilt diese Gleichung uneingeschränkt?

19) $\arcsin(x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz) = \frac{\pi}{2}$ für $\arcsin x + \arcsin y + \arcsin z = \frac{\pi}{2}$

20) $\operatorname{arccot}(x + y + z - xyz) = \frac{\pi}{2}$ für $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y + \operatorname{arccot} z = \frac{\pi}{2}$

21) $\operatorname{arctang} \dfrac{r \sin x}{1 - r\cos x} - \operatorname{arctang} \dfrac{-r\sin x}{1 + r\cos x} = \operatorname{arctang} ?$

22) $\frac{1}{2} \operatorname{arctang} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \dfrac{x}{2 + x^2} = \operatorname{arctang} ?$

23) $\frac{1}{3} \operatorname{arctang} x - \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \dfrac{x}{2 + x^2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \dfrac{x}{2 . 3 + x^2} = \operatorname{arctang} ?$

24) $\frac{1}{4} \operatorname{arctang} x - \frac{1}{4} \operatorname{arctang} \dfrac{x}{2 + x^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctang} \dfrac{x}{2 . 3 + x^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctang} \dfrac{x}{3 . 4 + x^2} = \operatorname{arctang} ?$

25) $\operatorname{arctang} \dfrac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \dfrac{1}{a} = \operatorname{arctang} ?$

26) $\operatorname{arctang} \dfrac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \dfrac{b - a}{ab + 1} + \operatorname{arctang} \dfrac{1}{b} = \operatorname{arctang} ?$

27) $\operatorname{arctang} \dfrac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \dfrac{b - a}{ab + 1} + \operatorname{arctang} \dfrac{c - b}{bc + 1} + \operatorname{arctang} \dfrac{1}{c} = \operatorname{arctang} ?$

28) $\operatorname{arctang} \dfrac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \dfrac{b - a}{ab + 1} + \operatorname{arctang} \dfrac{c - b}{bc + 1} + \operatorname{arctang} \dfrac{d - c}{cd + 1} + \operatorname{arctang} \dfrac{1}{d} = \operatorname{arctang} ?$

Man drücke nachstehende Funktionen durch $\arcsin x$ aus:

29) $\arccos \dfrac{x + \sqrt{1 - x^2}}{2} = ?$

30) $\operatorname{arctang} \sqrt{\dfrac{1 + x}{1 - x}} = ?$

31) $\arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}) = ?$

II. Ueber cyclometrische Funktionen.

Man beweise folgende Formeln:

1) $\arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$

2) $\arcsin\frac{8}{17} + \arcsin\frac{15}{17} = \frac{\pi}{2}$

3) $\arcsin\frac{12}{37} + \arcsin\frac{35}{37} = \frac{\pi}{2}$

4) $\arcsin\frac{28}{53} + \arcsin\frac{45}{53} = \frac{\pi}{2}$

5) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

6) $6\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} + \arccos\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} = \frac{\pi}{2}$

7) $\operatorname{arctang}(2-\sqrt{3}) + \operatorname{arctang}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

8) $2\operatorname{arctang}(\sqrt{2}-1) + 2\operatorname{arctang}(2-\sqrt{3}) + \operatorname{arccot}(2+\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$

9) $\arcsin\frac{1}{2} + \operatorname{arctang}(2-\sqrt{3}) = \frac{\pi}{4}$

10) $\operatorname{arctang}\frac{1}{2} + \operatorname{arctang}\frac{1}{5} + \operatorname{arctang}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

11) $8\operatorname{arctang}\frac{1}{3} + 4\operatorname{arctang}\frac{1}{7} = \pi$

12) $4\operatorname{arctang}\frac{1}{5} - \operatorname{arctang}\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$

13) $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{4} + \arccos\frac{\sqrt{5}+1}{4} = 2\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}}$

14) $\operatorname{arcsec}\frac{4}{\sqrt{5}-1} - \operatorname{arcsec}\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \operatorname{arccosec}\frac{4}{\sqrt{5}+1}$

15) $\arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arcsin x$

16) $\arcsin\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-2x}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\arcsin x$

17) $\arccos\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\ldots\ldots-\sqrt{2}}}} = \frac{\pi}{3} + \left(\frac{-1}{2}\right)^n\frac{\pi}{6}$

18) $\operatorname{arctang} d_1 + \operatorname{arctang} d_2 + \operatorname{arctang} d_3 + \ldots\ldots + \operatorname{arctang} d_n =$
$$\frac{\Sigma d d_1 - \Sigma d_1 d_2 d_3 + \Sigma d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 - \ldots\ldots}{1 - \Sigma d_1 d_2 + \Sigma d_1 d_2 d_3 d_4 - \ldots\ldots}$$
Gilt diese Gleichung uneingeschränkt?

19) $\arcsin(x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz) = \frac{\pi}{2}$ für $\arcsin x +$
$+ \arcsin y + \arcsin z = \frac{\pi}{2}$

20) $\operatorname{arccot}(x + y + z - xyz) = \frac{\pi}{2}$ für $\operatorname{arccot} x + \operatorname{arccot} y +$
$+ \operatorname{arccot} z = \frac{\pi}{2}$

21) $\operatorname{arctang} \frac{r \sin x}{1 - r \cos x} - \operatorname{arctang} \frac{-r \sin x}{1 + r \cos x} = \operatorname{arctang}?$

22) $\frac{1}{2} \operatorname{arctang} x - \frac{1}{2} \operatorname{arctang} \frac{x}{2 + x^2} = \operatorname{arctang}?$

23) $\frac{1}{3} \operatorname{arctang} x - \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \frac{x}{2 + x^2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \frac{x}{2.3 + x^2} =$
$= \operatorname{arctang}?$

24) $\frac{1}{4} \operatorname{arctang} x - \frac{1}{4} \operatorname{arctang} \frac{x}{2 + x^2} - \frac{1}{4} \operatorname{arctang} \frac{x}{2.3 + x^2} -$
$- \frac{1}{4} \operatorname{arctang} \frac{x}{3.4 + x^2} = \operatorname{arctang}?$

25) $\operatorname{arctang} \frac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \frac{1}{a} = \operatorname{arctang}?$

26) $\operatorname{arctang} \frac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \frac{b - a}{ab + 1} + \operatorname{arctang} \frac{1}{b} = \operatorname{arctang}?$

27) $\operatorname{arctang} \frac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \frac{b - a}{ab + 1} + \operatorname{arctang} \frac{c - b}{bc + 1} +$
$+ \operatorname{arctang} \frac{1}{c} = \operatorname{arctang}?$

28) $\operatorname{arctang} \frac{ax - y}{ay + x} + \operatorname{arctang} \frac{b - a}{ab + 1} + \operatorname{arctang} \frac{c - b}{bc + 1} +$
$+ \operatorname{arctang} \frac{d - c}{cd + 1} + \operatorname{arctang} \frac{1}{d} = \operatorname{arctang}?$

Man drücke nachstehende Funktionen durch $\arcsin x$ aus:

29) $\arccos \frac{x + \sqrt{1 - x^2}}{2} = ?$

30) $\operatorname{arctang} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = ?$

31) $\arcsin \frac{1}{2} (\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}) = ?$

Man drücke nachstehende Funktionen durch arctang x aus:

32) $\operatorname{arctang}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = ?$

33) $\operatorname{arctang}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = ?$

34) $\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = ?$

35) Gegeben arcsec x; zu berechnen $\operatorname{arcsec} \frac{x^2}{x^2-2}$

36) Gegeben arcsin x und arcsin y, zu finden:

$$\operatorname{arctang} \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}}$$

37) Es ist $\operatorname{arctang} \frac{\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1-y^2}}{x-y}$ durch arccos x und arccos y auszudrücken.

Man bestimme aus folgenden Gleichungen die Unbekannte x:

38) $\operatorname{arctang} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arctang} \frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{12}$

39) $\operatorname{arctang}(x+4) + \operatorname{arctang}(x-4) = \frac{\pi}{6}$

40) $\operatorname{arctang}(x+1) = 3 \operatorname{arctang}(x-1)$

41) $x = \arcsin \frac{\sqrt{3}-\cos x}{\sqrt{3}}$

42) $a = \arcsin 2\sqrt{x^2-x^4}$

43) $\operatorname{arccot} 16 (\cot x - \sec x) = x$

44) $\operatorname{arcsec} a - \operatorname{arcsec} b = \operatorname{arcsec} \frac{x}{b} - \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$

45) $\arcsin \operatorname{ver} x - \arcsin \operatorname{ver} b x = \arcsin \operatorname{ver} (1-b)$

46) $\arcsin \operatorname{ver} (1+x) - \arcsin \operatorname{ver} (1-x) = \operatorname{arctang} 2\sqrt{1-x^2}$

Man berechne aus folgenden Gleichungen die Werthe der beiden Unbekannten x und y:

47) $\arcsin \frac{\sqrt{2ax-a^2}}{x} = \operatorname{arctang} \frac{y}{b}$

$$\arccos\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right) = 2 \arccos \frac{y}{b}$$

48) $\arcsin\left(\frac{y-1}{y+1}\right) = 2 \operatorname{arctang}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\operatorname{arccot} x^2 y^2 = 2 \operatorname{arctang}(\sqrt{2}-1)$$

49) $\frac{1}{2}\arcsin 2x\sqrt{1-x^2} = \operatorname{arctang}\frac{y-3}{\sqrt{-8+6y-y^2}} + \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{arccot}\frac{1}{x^2} = \arcsin\frac{5-y^2}{\sqrt{26-10y^2+y^4}}$

50) $\operatorname{arctang}\frac{ax-y}{ay+x} + \operatorname{arctang}\frac{1}{a} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\arccos x + \arcsin\sqrt{1-y^2} = \frac{\pi}{2}$

51) $\operatorname{arctang}\left(\frac{x\sqrt{a^2-y^2}-y}{y\sqrt{a^2-y^2}+x}\right) - \operatorname{arctang}\left(\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-x}{x\sqrt{x^2+y^2}+y}\right) =$

$= \operatorname{arctang}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} - \operatorname{arctang}\frac{1}{\sqrt{a^2-y^2}}$

$\operatorname{arctang}\frac{x+y}{\sqrt{4x^2-(x+y)^2}} = \arcsin\frac{x}{2}$

52) $2\operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arccos\left[1-4a^2+4a^2y^2-4y^2\right]$

$\operatorname{arctang}\frac{2(x^2-y^2)}{1-(x^2-y^2)^2} - 2\operatorname{arcsec}\sqrt{1+b^4}$

53) $\arcsin\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arccot}\frac{1-2a^2}{2a\sqrt{1-a^2}}$

$\operatorname{arctang}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2 = \operatorname{arccosec}\frac{b^2+x^2}{b^2} - \frac{\pi}{4}$

54) $\operatorname{arctang}(x^3+y^3) = \frac{1}{2}\arccos\frac{45431}{47851}$

$\arccos\sqrt{\frac{6(x+y)+1}{12}} = \operatorname{arccosec}\sqrt{2}$

III. Ueber Grenzwerthe.

Man bestimme die Grenzwerthe folgender Ausdrücke, wenn δ gegen die Nulle convergirt und ω eine unendlich wachsende Zahl ist.

1) $\frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta}$

2) $\frac{(a+b\delta)^m - a^m}{c\delta}$

3) $\frac{a^2-\sqrt{a^4-\delta^2}}{\delta^2}$

4) $\dfrac{a - \sqrt[n]{a^n - \delta^n}}{\delta^n}$

5) $\dfrac{\sqrt{a^2 + a\delta + \delta^2} - \sqrt{a^2 - a\delta + \delta^2}}{\sqrt{a + \delta} - \sqrt{a - \delta}}$

6) $\dfrac{\sqrt[n]{a^n + \delta} - \sqrt[n]{a^n - \delta}}{\delta}$

7) $\dfrac{(b + c\cos\delta + a\sin\delta)^m - (b + c\cos\delta)^m}{(b + c)^m\, a\sin\delta}$

8) $\dfrac{\cos^m\delta - 1}{\sin^2\dfrac{\delta}{2}}$

9) $\dfrac{(a\omega + b)^n - a\omega^n}{c\,\omega^{n-1}}$.

10) $\dfrac{\sqrt{1+\omega} - \sqrt{\omega}}{\sqrt{1+2\omega} - \sqrt{2\omega}} \times \dfrac{\sqrt[3]{1+3\omega} - \sqrt[3]{3\omega}}{\sqrt[3]{1+4\omega} - \sqrt[3]{4\omega}} \times \dfrac{\sqrt[4]{1+4\omega} - \sqrt[4]{4\omega}}{\sqrt[4]{1+5\omega} - \sqrt[4]{5\omega}} \times$

$\times \cdots\cdots \times \dfrac{\sqrt[n]{1+n\omega} - \sqrt[n]{n\omega}}{\sqrt[n]{1+(n+1)\omega} - \sqrt[n]{(n+1)\omega}}$

11) $(1 + \delta)^{\frac{1}{\delta}}$

12) $(1 + a\delta)^{\frac{b}{c\delta}}$

13) $\dfrac{l(1 + a\sin\delta)}{\sin\delta}$

14) $\left[\sqrt{a^2 + \delta^2} + \sqrt{a^2 - (a - \delta)^2}\right]^{\frac{1}{\sqrt{2a\delta - \delta^2}}}$

15) $\dfrac{l(1 + a\delta) - l(1 + b\delta)}{c\delta}$

16) $\dfrac{l\left(\dfrac{1 + a\sin\delta}{1 + b\,\mathrm{tang}\,\delta}\right)}{\mathrm{tang}\,\delta}$

17) $\left(\dfrac{a - b\delta}{a + b\delta}\right)^{\frac{1}{2b\delta}}$

18) $\dfrac{l(1 + m\arcsin\delta)}{\mathrm{arctang}\,\dfrac{\delta}{\sqrt{1 - \delta^2}}}$

19) $\left(\frac{a + b \arccos \sqrt{1-\delta^2}}{a + c \operatorname{arccosec} \frac{1}{\delta}}\right)^{\frac{1}{\operatorname{arccot} \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}}$

20) $\left(1 - \frac{\pi}{4} + \arcsin \sqrt{\frac{1-\delta}{2}}\right)^{\frac{1}{\arcsin \delta}}$

21) $\frac{l\left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \delta - \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \frac{\delta}{2+\delta^2} - \frac{1}{3} \operatorname{arctang} \frac{\delta}{2.3+\delta^2}\right)}{\operatorname{arctang} \frac{6\delta}{9-\delta^2}}$

22) $\frac{a^\delta - 1}{\delta}$

23) $\frac{a^\delta - b^\delta}{\delta}$

24) $\frac{a^{\sin \delta} - 1}{\operatorname{tang} \delta}$

25) $\frac{a^{2\delta+\delta^2} - b^{2\delta+\delta^2}}{b^\delta - c^\delta}$

26) $\frac{a^{2\delta+\delta^2} - b^{-2\delta-\delta^2}}{b^\delta - c^{-\delta}}$

27) $\left(a^{\frac{e}{\omega}} - b^{-\frac{e}{\omega}}\right)\omega$

28) $\frac{\pi}{4\delta} - \frac{\pi}{2\delta(e^{\pi\delta}+1)}$

29) $\frac{(e^\delta - e^{-\delta})^2}{\delta^2 \cos \delta}$

30) $\frac{e^\delta - e^{\sin \delta}}{\delta - \sin \delta}$

31) $\frac{\sin \delta}{\delta}$

32) $\frac{\sin \delta}{\delta^2}$

33) $\frac{\delta^{-1}}{\cot \delta}$

34) $\frac{\operatorname{tang} \delta}{\operatorname{tang} n\delta}$

35) $\left(\frac{\sin \delta}{\sin p\delta}\right)^n$

36) $\dfrac{\delta}{\sqrt{1-\cos\delta}}$

37) $2^{\omega} \operatorname{tang} \dfrac{a}{2^{\omega}}$

38) $\dfrac{a^{\delta} \sin a\delta - b^{\delta} \sin b\delta}{g^{\delta} \sin g\delta - h^{\delta} \sin h\delta}$

39) $\dfrac{\operatorname{tang}(a+\delta) - \operatorname{tang}(a-\delta)}{\operatorname{arctang}(a+\delta) - \operatorname{arctang}(a-\delta)}$

40) $2r\pi\left(r + \dfrac{r^2}{\delta} \arcsin\dfrac{\delta}{r}\right)$

41) $\dfrac{(1-\delta)\sin\delta}{(1+\delta)\operatorname{arctang}\dfrac{\delta}{1+\delta^2}}$

42) $\dfrac{\delta e^{\cos\delta}}{1-\sin\delta-\cos\delta}$

43) $\sin\left(r + \omega \operatorname{arctang}\dfrac{\alpha\sin\varphi}{\omega+\alpha\cos\varphi}\right)$

44) $\dfrac{\arcsin\dfrac{1}{\omega}}{\operatorname{arctang}\dfrac{a\omega}{b+c\omega^2}}$

45) $\dfrac{\arcsin\dfrac{2\sqrt{\omega^2-1}}{\omega^2}}{\operatorname{arccot}\dfrac{\omega^2-1}{2\omega}}$

Man bestimme folgende zusammengesetzte Grenzwerthe:

46) $\dfrac{e^{\delta}-1}{e^{\delta}\, l(1-\delta)}$

47) $\dfrac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{\sin\delta}$

48) $\sqrt[\delta]{\dfrac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}}$

49) $\dfrac{\sin\delta}{l(1-\delta)}$

50) $\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2\omega} + \sin\dfrac{2\pi}{2\omega} + \sin\dfrac{3\pi}{2\omega} + \dots + \sin\dfrac{n\pi}{2\omega}}{l\left(1-\dfrac{\pi}{2\omega}\right) + l\left(1-\dfrac{2\pi}{2\omega}\right) + l\left(1-\dfrac{3\pi}{2\omega}\right) + \dots + l\left(1-\dfrac{n\pi}{2\omega}\right)}$

51) $\dfrac{a^{\delta} - b^{\delta}}{l(1-\delta)}$

52) $\operatorname{cosec} \delta\, l(1-\delta)$

53) $\left(2 - \dfrac{a-\delta}{a}\right)^{\operatorname{tang}\left(\frac{a-\delta}{2a}\right)\pi}$

54) $\left(3 - \dfrac{2a+\delta}{a}\right)^{\operatorname{tang}\frac{\pi(2a+\delta)}{4a}}$

55) $\dfrac{a^{l(1-\delta)} - 1 + \delta}{l(1-\delta)}$

56) $\dfrac{\delta + a\,l(a+\delta) - a\,l\,a}{a - \sqrt{a^2 - \delta}}$

57) $(\cos\delta + \arcsin\delta)^{\cos\delta}$

58) $\left[1 + \dfrac{2\alpha}{\omega}\cos\varphi + \left(\dfrac{\alpha}{\omega}\right)^2\right]^{\frac{\omega-\alpha}{2}}$

59) $\dfrac{a^{\sin\delta} - b^{\operatorname{tang}\delta} + c^{(1+\delta)^n - 1} - d^{l(1+\delta)}}{(1+\delta)^n - 1}$

60) $\dfrac{l\left(\frac{4+\pi}{4} - \operatorname{arctang}\sqrt{\frac{1+\delta}{1-\delta}}\right) + l(\cos\delta + m\sin\delta)}{\arcsin\frac{\delta}{2}}$

61) $\sum\limits_{n=1}^{n=r}\left[n - \dfrac{(n-1)a + \sin\delta}{a}\right]^{\frac{1}{2}\sec\frac{\pi[(n-1)a-\delta]}{2(n-1)a}}$

62) $\sum\limits_{n=0}^{n=r-1}\dfrac{n\,l[1+(n+1)\delta]}{a^{n\delta} - b^{n\delta}}$

63) $\sum\limits_{n=0}^{n=r-1}\left[\dfrac{e^{\delta} + e^{-\delta}}{2}\right]^{\frac{n}{\delta^2}}$

64) $\dfrac{\frac{n\pi}{4} - \sum\limits_{1}^{n}\arcsin\sqrt{\frac{1-n\delta}{2}}}{\sum\limits_{1}^{n} e^{\sin n\delta} - n}$

65) $\dfrac{l \prod\limits_{1}^{r} \left(1 + \dfrac{2\delta}{n\pi}\right)}{\sqrt{1 + \sin\delta} - 1}$

66) $\prod\limits_{1}^{r} (1 + n \arcsin\delta)^{\frac{1}{2n} \operatorname{tang} \frac{\pi(n-1) - \pi\delta}{2(n-1)n}}$

67) Welcher Grenze nähert sich der Bruch

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2n} + \sin\frac{2\pi}{2n} + \sin\frac{3\pi}{2n} + \ldots\ldots + \sin\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \ldots\ldots + \frac{n\pi}{2n}}$$

wenn n ins Unendliche wächst?

68) Unter derselben Voraussetzung bestimme man den Grenzwerth des Bruches

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2n} + \cos\frac{2\pi}{2n} + \cos\frac{3\pi}{2n} + \ldots\ldots + \cos\frac{n\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi}{2n} + \frac{3\pi}{2n} + \ldots\ldots + \frac{n\pi}{2n}}$$

Welcher Grenze nähern sich die folgenden Ausdrücke, wenn n ins Unendliche wächst?

69) $\sin\frac{\pi}{2n^2} + \sin\frac{3\pi}{2n^2} + \sin\frac{5\pi}{2n^2} + \ldots\ldots + \sin\frac{(2n-1)\pi}{2n^2}$

70) $\left(\frac{3}{2}\right)^n \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \sec 2\left(\frac{\pi}{3^n}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^n \operatorname{tang} 2\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \sec 4\left(\frac{\pi}{3^n}\right) +$
$+ \ldots\ldots + \left(\frac{3}{2}\right)^n \operatorname{tang} 2^{n-1}\left(\frac{\pi}{3^n}\right) \sec 2^n \left(\frac{\pi}{3^n}\right)$

71) $n \operatorname{arctang} x - n \operatorname{arctang}\frac{x}{2 + x^2} - n \operatorname{arctang}\frac{x}{2.3 + x^2} -$
$- \ldots\ldots - n \operatorname{arctang}\frac{x}{(n-1)n + x^2}$

72) $\sin\frac{\pi}{n} + 2\sin\frac{\pi}{2n} + 4\sin\frac{\pi}{4n} + 8\sin\frac{\pi}{8n} + \ldots\ldots\ldots +$
$+ 2^n \sin\frac{\pi}{n2^n}$

73) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{n}}{n} + \dfrac{\cos\frac{\pi}{2n}}{n} + \dfrac{\cos\frac{\pi}{4n}}{n} + \ldots\ldots + \dfrac{\cos\frac{\pi}{n.2^n}}{n}$

74) $\dfrac{\log 1}{n+1} + \dfrac{\log 2}{n+2} + \ldots\ldots + \dfrac{\log n}{n+n}$

75) Es sei $a_n = \sqrt{\frac{1 + a_{n-1}}{2}}$ und $a_1 < 1$ gegeben; der Grenzwerth des Produktes $a_1 a_2 \ldots a_n$ ist zu finden für das unendliche Wachsen des Stellenzeigers n.

76) Es sei $p_0 = 0$ und p_n als Funktion von n durch die Gleichung

$$p_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + p_n}{2}}$$

bestimmt; man finde den Grenzwerth der Funktion

$$\varphi(n) = 4^n (1 - p_n)$$

für $n = \infty$.

77) Es seien a und b zwei gegebene positive Grössen und

$$a_1 = \frac{1}{2}(a + b), \quad b_1 = \sqrt{a_1 b}$$

$$a_2 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad b_2 = \sqrt{a_2 b_1}$$

$$a_3 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1), \quad b_3 = \sqrt{a_3 b_2} \text{ etc.}$$

allgemein $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ und $b_n = \sqrt{a_n b_{n-1}}$; man bestimme *lim* a_n und *lim* b_n, für $n = \infty$.

78) Es sei $a_n = a_{n-1} + b_{n-1}$ und $b_n = a_{n-1}$; man bestimme den Grenzwerth von $\frac{a_n}{b_n}$, wenn n ins Unendliche wächst.

79) Es sei $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$ und $b_n = a_{n-1}$; man finde

$\lim \frac{a_n}{b_n}$, für $n = \infty$.

80) Es sei

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } a_n$$

als Funktion von n durch die Gleichung

$$\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^2 = \left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right) + 2$$

bestimmt; der Grenzwerth von $A_n = \frac{2^n}{a_n}$ für $n = \infty$ ist zu berechnen.

81) Durch die Gleichung

$$b^2_n = \frac{b^3_{n-1}}{2b_{n-1} + b_{n-2}}$$

ist b_n als eine Funktion des Stellenzeigers n bestimmt; der Grenzwerth von $A_n = 2^n b_n$ ist zu finden, wenn n ins Unendliche wächst und $b_0 = 2$, $b_1 = \sqrt{2}$ ist.

82) Folgender Satz ist zu beweisen:

Es sei $lim \dfrac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = f(x)$, und f(x) stets positiv und im Zustande fortwährender Abnahme von $x = a - 1$ anfangend; dann ist:

$$F(a+n) - F(a) < f(a) + f(a+1)\, f(a+2) + \ldots + f(a+n-1)$$
$$F(a+n) - F(a) - f(a+n) + f(a) > f(a) + f(a+1) + \ldots f(a+n-1).$$

Mit Hilfe dieses Satzes ermittle man folgende Grenzwerthe, für das unendliche Wachsen der positiven Grösse a:

83) $lim \left[\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a+1} + \dfrac{1}{a+2} + \ldots + \dfrac{1}{pa+q-1}\right]$

84) $lim \left[\dfrac{1}{a\,l\,a} + \dfrac{1}{(a+1)\,l(a+1)} + \ldots + \dfrac{1}{(a^2+a-1)\,l(a^2+a-1)}\right]$

85) $lim \left[\dfrac{1}{\sqrt{a^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2a}}\right]$

IV. Ueber die Continuität und Discontinuität der Funktionen.

Für welche Werthe von x erleiden folgende Funktionen eine Unterbrechung ihres continuirlichen Verlaufes?

1) $\sqrt{(m-n-x)(x+p-q)}$

2) $\sqrt{[x^4 + 12x^3 + 3x^2 + 7x + 1 - (x^2 + 5x - 4)(x^2 + 7x + 4)]}$

3) $\sqrt{\dfrac{170}{x} - \dfrac{170}{x+1} - \dfrac{51}{x+2}}$

4) $(x - \sqrt{a})\sqrt{\dfrac{x}{a-b} - \dfrac{1}{2\sqrt{a-x}}}$

5) $(x-25)\sqrt{x - \sqrt{x} - 20}$

6) $(x-8)\sqrt[4]{(\sqrt{2x+2} + \sqrt{7+6x} - \sqrt{7x+72})}$

7) $\sqrt{\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{2}} - \sqrt[3]{x-\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)}$

8) $l\left(\frac{\sqrt{x}}{21-\sqrt{x}}+\frac{21-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\frac{5}{2}\right)$

9) $l\left(\frac{7x-11}{9x-13}\right)\left(\frac{13x+29}{11x+11}\right)$

10) $l(a+b+x)+l(a+b-x)+l(x+a-b)+l(x-a+b)$

11) $l\left[(x+\sqrt{x})^4-(x+\sqrt{x})^2-20592\right]$

12) $x \operatorname{arcsec}(x^2-3x+3)$

13) $\sqrt{x-1}.\ \operatorname{arccosec}(x^2-5x+7)$

14) $\arcsin(3x-x^2)$

15) $\sqrt{(3-x)(4-x)}\arccos(4x-x^3)$

16) $\frac{m}{x^2+3x}\arcsin\frac{x}{1+x}$

17) $\sqrt{x^2-\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}}\arccos\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

18) $\frac{1}{4x-m+n}\operatorname{arctang}\left(x+\sqrt{x^2-mx+\frac{m^2-n^2}{4}}\right)$

19) $\frac{1}{3-x}\sin\left[\arcsin(3x-x^2)\right]$

20) $\sqrt{\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-4)}}\cos\left[\arccos(10x+5x^2)\right]$

21) $\sqrt{(x-3)(x+4)}\operatorname{tang}\left[\operatorname{arcsec}(10x+5x^2)\right]$

22) $b+\frac{(a-b)}{e^{e^{\frac{1}{x-a}}}}$

23) $\cos x-\sec^{-\sqrt[x]{2}}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

24) $m\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)-\frac{m}{\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{3}+x\right)\right]^{\sqrt[x-\frac{\pi}{12}]{l\,10}}}$

25) $a\operatorname{tang}x+(b\sec x-a\operatorname{tang}x)\,\pi^{-\pi^{\left[\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-\pi}\right]}}$

26) $\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}-\sqrt[\sqrt[\cot x]{\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}]{\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

27) $\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}(1+x)}{(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$

28) $\dfrac{1}{\cos\frac{x}{2}+(l\,x)^{\operatorname{tang} x}}$

29) $\dfrac{(a+b\,x)^n}{(a+b\,x)^m+(c+d\,x)^{\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g\,x}\right)}}$

30) $\dfrac{\sqrt{(x-1)(x-2)}}{\sqrt[x+1]{(x-3)(x-4)}+\sqrt[x+2]{(x-5)(x-6)}}$

31) $\dfrac{a\,x^2+b\,x+c}{d\,x^2+e\,x+f}\operatorname{arcsec}\dfrac{x+1}{x+2}$

32) $\dfrac{a+b\,x}{2}+\left(\dfrac{a-b\,x}{2}\right)\operatorname{arcsec}\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}$

33) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{\operatorname{arccot}(e^x-e^{-x}}$

34) $\operatorname{arctang}\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}\operatorname{arcsec}\dfrac{x}{\sqrt[3]{2-x}}$

35) $\sqrt{2a\,x-x^2}\operatorname{arccot}(a-x)$

36) $\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x-2}\arcsin\left[\left(\dfrac{1}{e}\right)^{\sqrt[x-4]{e}}-1\right]$

37) $m\arcsin\dfrac{x}{1+x}+\sin\left(\operatorname{arctang}\sqrt[3]{\dfrac{x}{x-3}}\right)$

38) $\dfrac{l\left(\pi+\operatorname{arcsec}\dfrac{a}{x-b}\right)}{c+l(x-d)}$

39) $x\operatorname{arctang}\dfrac{x}{x-1}+2x\operatorname{arccot}(2x-1)+3x\operatorname{arcsec}\left(\dfrac{3x}{3x-1}\right)+$
$+\,4x\operatorname{arccosec}(4x-1)$

40) $\dfrac{\sin(\operatorname{arctang}\sqrt[x]{e})}{\operatorname{arctang}(\sec x)}$

41) $l\left(a+\dfrac{\sqrt{1+e^{\frac{a}{\sin x}}-1}}{\sqrt{1+e^{\frac{a}{\sin x}}+1}}\right)$

42) $\sqrt{a-x}\,.\,\operatorname{arctang}\dfrac{b}{x-b}+\dfrac{\sqrt{c+e^{\frac{1}{x-c}}-c}}{\sqrt{e+e^{\frac{1}{x-c}}+c}}$

43) $\operatorname{arcsec}\dfrac{x}{x^2-1}\,.\,\operatorname{arctang}\dfrac{2x}{x^2-2}\,.\,\operatorname{arccosec}\dfrac{x^2-3}{3x}\,.\,\operatorname{arccot}\dfrac{x^2-4}{4x}$

44) $\arcsin\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+(l\,10)^{\frac{1}{x-1}}-\sqrt[3]{x-1}}}{\sqrt[3]{1+(l\,10)^{\frac{1}{x-1}}+\sqrt[3]{3x+5}}}\right)$

45) $\arccos\left(\dfrac{a+\sqrt[x]{e}}{a-\sqrt[x]{e}}\right)\,.\,\arcsin\,(\log e)^{\sqrt[x-1]{e}}$

46) Es sei $f(y)=ay^3+by^2+cy+d$
und $\quad y=\sqrt{x^2-8x+15}$;
für welche Werthe von y erleidet die Funktion $f(y)$ eine Unterbrechung ihres stetigen Verlaufes?

47) Man untersuche die Funktion

$$f(y)=\frac{a+by}{c+dy}$$

in Betreff ihres continuirlichen Verlaufes, wenn

$$y=l\left(\frac{7x-11}{9x-13}\right)\left(\frac{13x+29}{11x+11}\right)\text{ ist.}$$

Eben so sind folgende Funktionen bezüglich ihrer Continuität und Discontinuität zu untersuchen:

48) $f(y)=\sqrt{ay^2+by+c}$
$\quad y=\arccos(4x-x^3)$

49) $f(y)=l(a+b+y)+l(a+b-y)$
$\quad y=\arctan\left(x+\sqrt{x^2-mx+\dfrac{m^2-n^2}{4}}\right)$

50) $f(y)=\operatorname{arcsec}(y^2-3y+3)$
$\quad y=b+\dfrac{a-b}{e^{e^{\frac{1}{x-a}}}}$

51) $f(y) = \dfrac{1}{\cos\frac{y}{2} + (l\,y)^{\tan y}}$

$y = \operatorname{arcsec} \dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x}}$

52) $f(y) = \dfrac{a\,y^2 + b\,y + c}{d\,y^2 + e\,y + f}$

$y = \dfrac{a'\,z^2 + b'\,z + c'}{d'\,z^2 + e'\,z + f'}$

$z = \dfrac{a''x^2 + b''x + c''}{d''x^2 + e''x + f''}$

53) $f(y) = \arctan y$

$y = \arctan z$

$z = \arctan x$

V. Ueber die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

Man bestimme aus der in den folgenden Beispielen gegebenen recurrirenden Form des allgemeinen Gliedes u_n einer Reihe und so vielen unmittelbar auf einander folgenden Gliedern, als das Recursionsgesetz bedingt, die independente Form von u_n und beweise die Divergenz der Reihe:

1) $u_n = \dfrac{(2n+1)(3n-2)}{(3n+1)(2n-1)}\, u_{n-1}, \quad u_0 = 1$

2) $u_n = \dfrac{(3n-2)(4n-2)}{(3n-5)(4n+2)}\, u_{n-1}, \quad u_1 = \dfrac{1}{6}$

3) $u_n = \dfrac{n^2-1}{n^2}\, u_{n-1}, \quad u_1 = 1$

4) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}\, u_{n-1}, \quad u_0 = \dfrac{1}{2}$

5) $u_n = \dfrac{(2n+1)(2n-2)}{(2n+2)(2n-3)}\, u_{n-1}, \quad u_1 = \dfrac{1.3}{2.4}$

6) $u_n = \sqrt{\dfrac{n}{n-1}} \cdot \dfrac{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}\, u_{n-1}, \quad u_1 = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$

7) $u_n = \dfrac{(\sqrt[n+1]{a} - 1)(\sqrt[n-1]{a} - 1)}{(\sqrt[n]{a} - 1)^2}\, u_{n-1}, \quad u_1 = \dfrac{1}{\sqrt{a} + 1}$

$$8)\quad u_n = \frac{(n+1)^{\frac{2n+3}{2}}}{(n+2)^{\frac{n+2}{2}}\, n^{\frac{n+1}{2}}}\, u_{n-1}\,,\quad u_0 = \frac{1}{2}$$

$$9)\quad u_n = \cos\frac{x}{n}\, u_{n-1}\,,\quad u_1 = \cos x$$

$$10)\quad u_n = \frac{u_{n-1} + u_{n-2}}{2}\,,\quad u_0 = 1\,,\quad u_1 = \frac{1}{2}\,.$$

$$11)\quad u_n = \sqrt{u_{n-2}\, u_{n-1}}\,,\quad u_0 = 2\,,\quad u_1 = \frac{3}{2}$$

$$12)\quad \frac{n\,u_n - 2\,(n-1)\,u_{n-1} + (n-2)\,u_{n-2}}{(n-1)\,u_{n-1} - 2\,(n-2)\,u_{n-2} + (n-3)\,u_{n-3}} = \frac{u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}}{u_{n-1} - 2u_{n-2} + u_{n-3}}$$

$$u_0 = \frac{2}{3}\,,\quad u_1 = \frac{16}{45}\,,\quad u_2 = \frac{22}{75}$$

Aus der in folgenden Beispielen gegebenen Summenformel S_n einer Reihe leite man das Glied u_n ab und entscheide über die Convergenz oder Divergenz der Reihe.

$$13)\quad S_n = \frac{3n+2}{4n+3}$$

$$14)\quad S_n = \frac{2n+a}{3n+b}$$

$$15)\quad S_n = \frac{(n+1)\,(2n+2)}{(2n+1)\,(3n+2)}$$

$$16)\quad S_n = \frac{4n^2 - a^2}{9n^2 - b^2}$$

$$17)\quad S_n = \frac{\frac{1}{2}\,n\,(n+1)}{(2n+1)^2}$$

$$18)\quad S_n = \frac{(n+1)^2}{a^2\,[a^2 + 4\,(n+1)^2]}$$

$$19)\quad S_n = \frac{\frac{1}{2}\,n\,(n+1)}{(4a^2 + 2n^2 + 2n + 1) - 4n^2\,(n+1)^2}$$

$$20)\quad S_n = \frac{n\,(4a^2 - 2n - 1)}{(4a^2 + 2n^2 + 2n + 1)^2 - 4n^2\,(n+1)^2}$$

$$21)\quad S_n = \frac{(n\,b + 1)\,(n+1)}{[a^2 + (b-1)^2]\,[a^2 + \{(2n+1)\,b + 1\}^2]}$$

$$22)\quad S_n = \frac{l2\;l4\;l8\;l16\;l32\;\ldots\ldots\;l2^n}{l3\;l9\;l27\;l81\;l243\ldots\;l3^n}$$

$$23)\quad S_n = \frac{3\,.\,5\,.\,7\,\ldots\ldots\,(2n+3)}{2\,.\,4\,.\,6\,\ldots\ldots\,(2n+2)} - 1$$

24) $S_n = 1 - \frac{3.5.7\ldots\ldots(2n+3)}{4.6.8\ldots\ldots(2n+4)}$

25) $S_n = \frac{a}{a+c-b}\left[\frac{(a+c)(a+2c)\ldots\ldots[a+(n+1)c]}{b(b+c)\ldots\ldots(b+nc)} - 1\right]$

26) $S_n = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{r!} - \frac{1}{(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+r+1)}\right)$

27) $S_n = \frac{1-\cos^n x}{2\sin\frac{x}{2}}$

28) $S_n = \frac{2^{n+1}+2^n-2n-3}{2^{n-1}}$

29) $S_n = \frac{3^{n+1}-2n-3}{2.3^{n-1}}$

30) $S_n = \frac{a+(a-b)x-(a+nb)x^n+[a+(n-1)b]x^{n+1}}{(1-x)^2}$

31) $S_n = \frac{1}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x)^3} - \frac{n(n+1)}{2(1-x)}x^n - \frac{nx^n}{(1-x)^2} - \frac{x^n}{(1-x)^3}$

32) $S_n = \frac{1-x^n}{1-x}.a + \frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2}bx + \frac{1-x^{n-2}}{(1-x)^3}cx^2 + \frac{1-x^{n-3}}{(1-x)^4}dx^3 -$
$- \frac{[b(n-1)_1+c(n-1)_2+d(n-1)_3]x^n}{1-x} - \frac{[c(n-2)_1+d(n-2)_2]x^n}{(1-x)^2} -$
$- \frac{d(n-3)_1x^n}{(1-x)^3}$

Für folgende Reihen ist das summatorische Glied zu entwickeln. Welche von diesen Reihen sind convergent, welche divergent, und welche Summe besitzen die convergenten Reihen?

33) $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \ldots\ldots$

34) $\frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+2)(k+3)} + \frac{1}{(k+3)(k+4)} + \ldots$

35) $\frac{7}{4} + \frac{17}{4.9} + \frac{31}{9.16} + \frac{49}{16.25} + \frac{71}{25.36} + \ldots\ldots$

36) $\frac{2}{1.4.6} + \frac{3}{2.5.7} + \frac{4}{3.6.8} + \frac{5}{4.7.9} + \ldots\ldots$

37) $\frac{2}{1.3.5.7} + \frac{3}{3.5.7.9} + \frac{4}{5.7.9.11} + \frac{5}{7.9.11.13} + \ldots\ldots$

38) $\frac{1}{1.3.5.7} + \frac{1}{3.5.7.9} + \frac{1}{5.7.9.11} + \frac{1}{7.9.11.13} + \ldots\ldots$

39) $\frac{1}{1.3.4.5}+\frac{4}{2.4.5.6}+\ldots\ldots+\frac{n^2-n+1}{n(n+2)(n+3)(n+4)}+\ldots.$

40) $\frac{5}{1.2.4.5}+\frac{5}{2.3.5.6}+\ldots\ldots+\frac{n^2-3n+7}{n(n+1)(n+3)(n+4)}+\ldots.$

41) $\frac{1}{(4a^2+1^2)(4a^2+3^2)}+\frac{2}{(4a^2+3^2)(4a^2+5^2)}+\frac{3}{(4a^2+5^2)(4a^2+7^2)}+$
$+\frac{4}{(4a^2+7^2)(4a^2+9^2)}+\ldots.$

42) $\frac{1}{a^2(a^2+4)}+\frac{3}{(a^2+4)\ (a^2+4.2^2)}+\frac{5}{(a^2+4.2^2)\ (a^2+4.3^2)}+$
$+\frac{7}{(a^2+4.3^2)(a^2+4.4^2)}+\ldots$

43) $\frac{1}{(4a^2+4.1^2+1)^2-16.1^2}+\frac{2}{(4a^2+4.2^2+1)^2-16.2^2}+$
$+\frac{3}{(4a^2+4.3^2+1)^2-16.3^2}+\ldots$

44) $\frac{4(a^2-1^2)+1}{(4a^2+4.1^2+1)^2-16.1^2}+\frac{4(a^2-2^2)+1}{(4a^2+4.2^2+1)^2-16.2^2}+$
$+\frac{4(a^2-3^2)+1}{(4a^2+4.3^2+1)^2-16.3^2}+\ldots$

45) $ab+(a+d)bq+\ldots\ldots.[a+(n+1)d]bq^{n-1}+\ldots.$

46) $1+2x+3x^2+4x^4+\ldots\ldots$

47) $2+\frac{7}{2}x+\frac{17}{4}x^2+\frac{39}{8}x^3+\frac{89}{16}x^4+\ldots.$

48) $1+\frac{2.3}{1.2}x+\frac{3.4}{1.2}x^2+\frac{4.5}{1.2}x^3+\ldots..$

49) $1+\frac{2.3.4}{1.2.3}x+\frac{3.4.5}{1.2.3}x^2+\frac{4.5.6}{1.2.3}x^3+\ldots..$

50) $1+\frac{k!}{(k-1)!}x+\frac{(k+1)!}{2!(k-1)!}x^2+\frac{(k+2)!}{3!(k-1)!}x^3+\ldots.$

51) $a^m+(ax)^m+(ax^2)^m+(ax^3)^m+\ldots..$

52) $\frac{\text{tang}\,x\,.\,\text{tang}\,2x}{\text{tang}\,2x-\text{tang}\,x}+\frac{\text{tang}\,2x\,.\,\text{tang}\,4x}{\text{tang}\,4x-\text{tang}\,2x}+\frac{\text{tang}\,3x\,.\,\text{tang}\,6x}{\text{tang}\,6x-\text{tang}\,3x}+\ldots$

53) $\cos x\,.\,\cos y+\cos 2x\,.\,\cos 2y+\cos 3x\,.\,\cos 3y+$
$+\cos 4x\,.\,\cos 4y+\ldots$

54) $\text{tang}\,x\,.\,\sec 2x+\text{tang}\,2x\,.\,\sec 4x+\text{tang}\,4x\,.\,\sec 8x+$
$+\text{tang}\,8x\,.\,\sec 16x+\ldots$

55) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x+\ldots..$

Man untersuche folgende Reihen mit Zuhilfenahme des Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ in Betreff ihrer Convergenz oder Dive:genz:

56) $1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2.3.4}{3.5.7}+\frac{2.3.4.5}{3.5.7.9}+\ldots\ldots$

57) $1+\frac{2}{1}+\frac{2.3}{1.4}+\frac{2.3.4}{1.4.7}+\frac{2.3.4.5}{1.4.7.10}+\ldots\ldots$

58) $1+\frac{2}{9}+\frac{2.5}{9.11}+\frac{2.5.8}{9.11.13}+\frac{2.5.8.11}{9.11.13.15}+\ldots\ldots$

59) $1+\frac{1}{8}+\frac{1.5}{8.11}+\frac{1.5.9}{8.11.14}+\frac{1.5.9.13}{8.11.14.17}+\ldots\ldots$

60) $1+\frac{1.2}{1.4}+\frac{1.2}{1.4}\cdot\frac{2.3}{3.7}+\frac{1.2}{1.4}\cdot\frac{2.3}{3.7}\cdot\frac{3.4}{5.10}+\frac{1.2}{1.4}\cdot\frac{2.3}{3.7}\cdot\frac{3.4}{5.10}\cdot\frac{4.5}{7.13}+\ldots$

61) $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}+\frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{4.6}{6.9}+\frac{1.3.5}{2.5.8}\cdot\frac{4.6.8}{6.9.12}+\frac{1.2.5.7}{2.5.8.11}\cdot\frac{4.6.8.10}{6.9.12.15}+\ldots$

62) $1+\frac{1.1}{1.3}+\frac{1.1.4.5}{1.3.6.7}+\frac{1.1.4.5.7.9}{1.3.6.7.11.11}+\frac{1.1.4.5.7.9.10.13}{1.3.6.7.11.11.15.16}+\ldots$

63) $1+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{7}+\frac{1.4}{5.7}\cdot\frac{1.6}{7.13}+\frac{1.4.7}{5.7.9}\cdot\frac{1.6.11}{7.13.19}+\frac{1.4.7.10}{5.7.9.11}\cdot\frac{1.6.11.16}{7.13.19.25}+\ldots$

64) $1+\frac{1}{7}+\frac{1.10}{7.18}+\frac{1.10.25}{7.18.33}+\frac{1.10.25.46}{7.18.33.52}+\ldots\ldots$

65) $1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1.2}{4.6}\cdot\frac{1.3}{7.9}\cdot\frac{1.4}{9.11}+\frac{1.2.3}{4.6.8}\cdot\frac{1.3.5}{7.9.11}\cdot\frac{1.4.7}{9.11.13}+$
$+\frac{1.2.3.4}{4.6.8.10}\cdot\frac{1.3.5.7}{7.9.11.13}\cdot\frac{1.4.7.10}{9.11.13.15}+\ldots$

66) $\frac{a}{c}+\frac{a(a+b)(2a+b)}{c(a+d)(2c+d)}+\frac{a(a+b)(2a+b)}{c(c+d)(2c+d)}\cdot\frac{(2a+b)(4a+b)}{(2c+d)(4c+d)}+$
$+\frac{a(a+b)(2a+b)(3a+b)}{c(c+d)(2c+d)(3c+d)}\cdot\frac{(2a+b)(4a+b)(6a+b)}{(2c+d)(4c+d)(6c+d)}+\ldots.$

67) $\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}+\frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16}+\ldots\ldots$

68) $1+\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{4.6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{4.6.8}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4+\ldots$

69) $\frac{1^4}{a}+\frac{2^4}{a^2}+\frac{3^4}{a^3}+\frac{4^4}{a^4}+\ldots\ldots$

70) $\frac{1}{e^x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{4}}+1}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{e^{\frac{x}{8}}+1}+\ldots$

71) $1+2\,.\sin\frac{\pi}{4}+2\sin\frac{\pi}{4}\,.\,3\sin\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{4}\,.\,3\sin\frac{\pi}{6}\,.\,4\sin\frac{\pi}{8}+\ldots.$

72) $$1+\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{1^2}+\frac{2.3}{2.5}\cdot\frac{2.3^2}{1^2.2^2}+\frac{2.3.4}{2.5.8}\cdot\frac{2^1.3^2.4^3}{1^2.2^2.3^3}+\frac{2.3.4.5}{2.5.8.11}\cdot\frac{2^1.3^2.4^3.5^4}{1^2.2^2.3^3.4^4}+\dots$$

73) $$1+\frac{2}{x}\left(\sqrt{1+\frac{x}{2}}-1\right)+\frac{2.3}{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{x}{2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{x}{3}}-1\right)+$$
$$+\frac{2.3.4}{x^3}\left(\sqrt{1+\frac{x}{2}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{x}{3}}-1\right)\left(\sqrt{1+\frac{x}{4}}-1\right)+\dots..$$

74) $$1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos^3 x}{\sin^2\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\,\frac{\left(1-\cos^3 x\right)\left(1-\cos^3\frac{x}{2}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}\;.\;\sin^2\frac{x}{4}}+$$
$$+\frac{1}{8}\,\frac{\left(1-\cos^3 x\right)\left(1-\cos^3\frac{x}{2}\right)\left(1-\cos^3\frac{x}{3}\right)}{\sin^2\frac{x}{2}\;.\;\sin^2\frac{x}{4}\;.\;\sin^2\frac{x}{6}}$$

75) $$1+\frac{l\,(1+\cos x\sin x)}{\sin x}+\frac{l\,(1+\cos x\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{l\left(1+\cos x\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}+$$
$$+\frac{l\,(1+\cos x\sin x)}{\sin x}\cdot\frac{l\left(1+\cos x\sin\frac{x}{2}\right)}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{l\left(1+\cos x\sin\frac{x}{3}\right)}{\sin\frac{x}{3}}$$

76) $$1+\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2ax^2}}+\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+8ax^2}}+$$
$$+\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+8ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{3x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+18ax^2}}+$$
$$+\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+8ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{3x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+18ax^2}}\cdot$$
$$\frac{\arcsin\frac{1}{4x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+32ax^2}}+\dots$$

Folgende Reihen sind bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Theoremes, dass die beiden unendlichen Reihen

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ und $u_0 + 2u_1 + 4u_3 + 8u_7 + 16u_{15} + \ldots$ gleichzeitig convergiren und divergiren, zu untersuchen.

77) $\log 1 + \log \sqrt{2} + \log \sqrt[3]{3} + \log \sqrt[4]{4} + \log \sqrt[5]{5} + \ldots$

78) $1 + \frac{1}{2} l 2 + \frac{1}{3} l\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} l\left(\frac{4}{3}\right)^3 + \frac{1}{5} l\left(\frac{5}{4}\right)^4 + \ldots$

79) $1 + \frac{\sqrt[5]{3} - \sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{2}} + \frac{\sqrt[5]{4} - \sqrt[5]{3}}{\sqrt[5]{3}} + \frac{\sqrt[5]{5} - \sqrt[5]{4}}{\sqrt[5]{4}} + \ldots$

80) $1 + (\sqrt{e} - 1) + (\sqrt[3]{e} - 1) + (\sqrt[4]{e} - 1) + \ldots$

81) $1 + \left[a^{\frac{e}{2}} - (a+1)^{-\frac{e}{2}}\right] + \left[a^{\frac{e}{3}} - (a+1)^{-\frac{e}{3}}\right] + + \left[a^{\frac{e}{4}} - (a+1)^{-\frac{e}{4}}\right] + \ldots$

82) $\log x + \frac{1}{2} \log \frac{x}{2} + \frac{1}{3} \log \frac{x}{3} + \frac{1}{4} \log \frac{x}{4}$

83) $\log x + \frac{1}{2} \log 2x + \frac{1}{3} \log 3x + \frac{1}{4} \log 4x + \ldots$

84) $x^m + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^m + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)^m + \frac{1}{4}\left(\frac{x}{4}\right)^m + \ldots$

85) $1 + \frac{\sqrt[4]{1+2x} - \sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{2}} + \frac{\sqrt[4]{1+3x} - \sqrt[4]{3x}}{\sqrt[4]{3}} + \frac{\sqrt[4]{1+4x} - \sqrt[4]{4x}}{\sqrt[4]{4}} + \ldots$

86) $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{2 \sin 2x} + \frac{1}{3 \sin 3x} + \frac{1}{4 \sin 4x} + \ldots$

87) $\sin x + \frac{1}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{2}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{3}{4} \sin \frac{x}{4} + \ldots$

Man beurtheile folgende Reihen in Betreff ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Ausdruckes $n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

88) $1 + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}{2\sqrt{5}} + + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{11}}{3\sqrt{7}} + + \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{8}}{2\sqrt{5}} \cdot \frac{3\sqrt{7} - \sqrt{11}}{3\sqrt{7}} \cdot \frac{4\sqrt{9} - \sqrt{14}}{4\sqrt{9}}$

$$89)\ 1 + (1 - \sqrt{x}) + \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt{1.2}}\right] +$$
$$+ \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\sqrt{x} +\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{1.3}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}}\right) x - \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1.2.3}}\right] +$$
$$+ \left[1 - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}}\right)\sqrt{x} +\right.$$
$$+ \left(\frac{1}{\sqrt{1.2}} + \frac{1}{\sqrt{1.3}} + \frac{1}{\sqrt{1.4}} + \frac{1}{\sqrt{2.3}} + \frac{1}{\sqrt{2.4}} + \frac{1}{\sqrt{3.4}}\right) x -$$
$$- \left(\frac{1}{\sqrt{1.2.3}} + \frac{1}{\sqrt{1.2.4}} + \frac{1}{\sqrt{1.3.4}} + \frac{1}{\sqrt{2.3.4}}\right) x\sqrt{x} +$$
$$\left. + \frac{x^2}{\sqrt{1.2.3.4}}\right] + \ldots\ldots$$

$$90)\ l\left(1 + \frac{1}{1}\right) + \frac{1}{2}\, l\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\, l\left(1 + \frac{1}{3}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4}\, l\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ldots.$$

$$91)\ 1 + \frac{1}{a^{\sqrt{lg 2}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{lg 3}}} + \frac{1}{a^{\sqrt{lg 4}}} + \ldots\ldots$$

$$92)\ 1 - x^2 - x^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2\right] -$$
$$- x^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^3\right] -$$
$$- x^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^2\right]\left[1 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)^3\right]\left[1 - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{x^2}{4}\right)^4\right] - \ldots$$

$$93)\ \frac{\sin 1}{1} + \frac{\sin\frac{1}{2}}{2} + \frac{\sin\frac{1}{3}}{3} + \frac{\sin\frac{1}{4}}{4} + \ldots\ldots$$

$$94)\ 1 + \frac{2}{4}\cos\frac{x}{2} + \frac{2}{4}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{5}\cos\frac{x}{3} +$$
$$+ \frac{2}{4}\cos\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{5}\cos\frac{x}{3}\cdot\frac{4}{6}\cos\frac{x}{4} + \ldots.$$

$$95)\ \operatorname{arctang} x + \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{arctang}\frac{x}{3} +$$
$$+ \frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{x}{4} + \ldots.$$

96) $1 + \left(1 - 2\,\mathrm{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right) + \left(1 - \frac{2}{1}\mathrm{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(1 - \frac{2^2}{2}\mathrm{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right) +$

$+ \left(1 - \frac{2}{1}\mathrm{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(1 - \frac{2^2}{2}\mathrm{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)\left(1 - \frac{2^3}{3}\mathrm{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{8}\right) + \ldots\ldots$

97) $1 + \left(1 - \mathrm{tang}\,x\right) + \left(1 - \mathrm{tang}\,x\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}\right) +$

$+ \left(1 - \mathrm{tang}\,x\right)\left(1 - \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\,\mathrm{tang}\,\frac{x}{3}\right) +$

$+ \left(1 - \mathrm{tang}\,x\right)\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{tang}\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\mathrm{tang}\frac{x}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\mathrm{tang}\frac{x}{4}\right) + \ldots$

98) $1 + \frac{2 - (1 + \sin x)^x}{2} + \frac{2 - (1 + \sin x)^x}{2} \cdot \frac{8 - 3\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)^{2x}}{8} +$

$+ \frac{2 - (1 + \sin x)^x}{2} \cdot \frac{8 - 3\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)^{2x}}{8} \cdot \frac{18 - 5\left(1 + \sin\frac{x}{3}\right)^{3x}}{18} +$

$+ \frac{2 - (1 + \sin x)^x}{2} \cdot \frac{8 - 3\left(1 + \sin\frac{x}{2}\right)^{2x}}{8} \cdot \frac{18 - 5\left(1 + \sin\frac{x}{3}\right)^{3x}}{18} \cdot$

$\frac{32 - 7\left(1 + \sin\frac{x}{4}\right)^{4x}}{32} + \ldots$

Man untersuche folgende Reihen bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Gauss'schen Kennzeichens.

99) $1 + \frac{2}{5} + \frac{2.3}{5.6} + \frac{2.3.4}{5.6.7} + \frac{2.3.4.5}{5.6.7.8} + \ldots\ldots$

100) $1 + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2}{3.5} \cdot \frac{2.3}{4.6} + \frac{1.2}{3.5} \cdot \frac{2.3}{4.6} \cdot \frac{3.4}{5.7} +$

$+ \frac{1.2}{3.5} \cdot \frac{2.3}{4.6} \cdot \frac{3.4}{5.7} \cdot \frac{4.5}{6.8} + \ldots\ldots$

101) $\frac{a}{b} + \frac{a\,(a+1)\,(b+1)}{b(2a+1)(2b+1)} + \frac{a\,(a+1)\,(a+2)}{b(2a+1)(2a+2)} \cdot \frac{(b+1)\,(b+2)}{(2b+1)(2b+2)} +$

$+ \frac{a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3)}{b(2a+1)(2a+2)(2a+3)} \cdot \frac{(b+1)\,(b+2)\,(b+3)}{(2b+1)(2b+2)(2b+3)} + \ldots\ldots$

102) $\frac{1}{2^2} + \frac{1^2}{2^2} \cdot \frac{3}{4^2} + \frac{1^2.3^2}{2^2.4^2} \cdot \frac{5}{6^2} + \frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2} \cdot \frac{7}{8^2} + \ldots\ldots$

103) $1 + (m)_1\,(p)_1 + (m)_2\,(p)_2 + (m)_3\,(p)_3 + (m)_4\,(p)_4 + \ldots\ldots$

104) $a - (a)_1(a-1) + (a)_2(a-2) - (a)_3(a-3) + (a)_4(a-4) - \ldots\ldots$

105) $\frac{1}{a^2+1^2} - \frac{m^2-1^2}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)} + \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)} -$
$- \frac{(m^2-1^2)(m^2-3^2)(m^2-5^2)}{(a^2+1^2)(a^2+3^2)(a^2+5^2)(a^2+7^2)} + \ldots$

106) $\frac{1}{a^2+2^2} - \frac{m^2-2^2}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)} + \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)} -$
$- \frac{(m^2-2^2)(m^2-4^2)(m^2-6^2)}{(a^2+2^2)(a^2+4^2)(a^2+6^2)(a^2+8^2)} + \ldots$

107) $(a+1)\cdot\frac{1}{2} + 11a\cdot\frac{1}{2^2.4} + 21(a-1)\cdot\frac{1^2}{2^2.4^2.6} +$
$+ 31(a-2)\cdot\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2\,8} + 41(a-3)\cdot\frac{1^2.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2.10} + \ldots.$

108) $\frac{x}{a^2+x^2} + \frac{x+1}{a^2+(x+1)^2} + \frac{x+2}{a^2+(x+2)^2} + \frac{x+3}{a^2+(x+3)^2} + \ldots..$

109) $1\left(\frac{x}{1-x^2} - \frac{x}{2^2-x^2}\right) + 2\left(\frac{x}{3^2-x^2} - \frac{x}{4^2-x^2}\right) +$
$+ 3\left(\frac{x}{5^2-x^2} - \frac{x}{6^2-x^2}\right) + \ldots$

110) $1 - \frac{1}{2x+3}\left(m-\frac{1}{2}\right)_1 + \frac{1.3}{(2x+3)(2x+5)}\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)_2 -$
$- \frac{1.3.5}{(2x+3)(2x+5)(2x+7)}\cdot\left(m-\frac{1}{2}\right)_3 + \ldots..$

Folgende Reihen prüfe man in Bezug ihrer Convergenz oder Divergenz und bediene sich hiebei des Ausdruckes $n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$.

111) $1 + \sqrt[3]{12\cdot\frac{2!}{4!}} + \sqrt[3]{12\cdot\frac{3!}{5!}} + \sqrt[3]{12\cdot\frac{4!}{6!}} + \sqrt[3]{12\cdot\frac{5!}{7!}} +$
$+ \sqrt[3]{12\cdot\frac{6!}{8!}} + \ldots$

112) $1 + \sqrt{\frac{3}{4}} + \sqrt[6]{\frac{3^3.4^2}{4^3.6^2}} + \sqrt[24]{\frac{3^{12}.4^8\,5^6}{4^{12}.6^8.8^6}} + \sqrt[120]{\frac{3^{60}.4^{40}.5^{30}.\,6^{24}}{4^{60}.6^{40}.8^{30}.10^{24}}} + \ldots.$

113) $1 + e^{-\frac{4}{2}} + e^{-\left(\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}\right)} + e^{-\left(\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}\right)} +$
$+ e^{-\left(\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}+\frac{13}{4.7}\right)} + e^{-\left(\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}+\frac{13}{4.7}+\frac{16}{5.9}\right)} + \ldots$

114) $1 + e^{-\frac{3}{1.1}} + e^{-\left(\frac{3}{1.1}+\frac{5}{2.5}\right)} + e^{-\left(\frac{3}{1.1}+\frac{5}{2.5}+\frac{7}{3.9}\right)} +$
$+ e^{-\left(\frac{3}{1.1}+\frac{5}{2.5}+\frac{7}{3.9}+\frac{9}{4.13}\right)} + \ldots.$

$$115)\ 1+\sqrt{\frac{2}{4}}\cdot e^{\arcsin\frac{\pi}{4}}+\sqrt{\frac{2.5}{4.7}}\cdot e^{\arcsin\frac{\pi}{8}}+$$
$$+\sqrt{\frac{2.5.10}{4.7.12}}\cdot e^{\arcsin\frac{\pi}{12}}+\sqrt{\frac{2.5.10.17}{4.7.12.19}}\cdot e^{\arcsin\frac{\pi}{16}}+\ldots\ldots$$

$$116)\ 1+\sqrt{\frac{2}{4}}\,e^{-\arcsin\frac{\pi}{4}}+\sqrt{\frac{2.5}{4.7}}\,e^{-2\arcsin\frac{\pi}{8}}+$$
$$+\sqrt{\frac{2.5.10}{4.7.12}}\,e^{-3\arcsin\frac{\pi}{12}}+\sqrt{\frac{2.5.10.17}{4.7.12.19}}\,e^{-4\arcsin\frac{\pi}{16}}$$

$$117)\ 1+\frac{1.3}{5.6}\,e^{-\frac{\operatorname{tang}x}{x}}+\frac{1.3.3.5}{5.6.7.8}\,e^{-\frac{\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{x}}+$$
$$+\frac{1.3.3.5.5.\ 7}{5.6.7.8.9.10}\,e^{-\frac{\operatorname{tang}\frac{x}{3}}{x}}+\frac{1.3.3.5.5.\ 7.\ 7.\ 9}{5\ 6.7.8.9.10.11.12}\,e^{-\frac{\operatorname{tang}\frac{x}{4}}{x}}+\ldots$$

$$118)\ 1+\frac{1}{\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}}+\frac{1}{\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}}}+$$
$$+\frac{1}{\left(1+2\sin x\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left(1+2\sin\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}}\left(1+2\sin\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{3\sin\frac{x}{3}}}}+\ldots.$$

$$119)\ 1+\left(\frac{1+\operatorname{tang}x}{1+\pi\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tang}x}}+\left(\frac{1+\operatorname{tang}x}{1+\pi\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tang}x}}\left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1+\pi\sin\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{x}{2}}}+$$
$$+\left(\frac{1+\operatorname{tang}x}{1+\pi\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tang}x}}\left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1+\pi\sin\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{x}{2}}}\left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{3}}{1+\pi\sin\frac{x}{3}}\right)^{\frac{1}{3\operatorname{tang}\frac{x}{3}}}+\ldots.$$

Folgende Reihen sind bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz mittelst des Ausdruckes $\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{l n}$ zu untersuchen:

$$120)\ \frac{1}{2}+\frac{2^2}{3^2\sqrt{2}}+\frac{3^3}{4^3\sqrt{3}}+\frac{4^4}{5^4\sqrt{4}}+\ldots..$$

121) $2 + \frac{3^2}{2^4} + \frac{4^3}{3^5} + \frac{5^4}{4^6} + \ldots\ldots$

122) $\frac{1}{2^m - 1} + \frac{2^{m-\frac{3}{2}}}{3^m - 2^m} + \frac{3^{m-\frac{3}{2}}}{4^m - 3^m} + \frac{4^{m-\frac{3}{2}}}{5^m - 4^m} + \ldots\ldots$

123) $\frac{a^e - b^{-e}}{1} + \frac{a^{\frac{e}{2}} - b^{-\frac{e}{2}}}{2} + \frac{a^{\frac{e}{3}} - b^{-\frac{e}{3}}}{3} + \frac{a^{\frac{e}{4}} - b^{-\frac{e}{4}}}{4} + \ldots\ldots$

124) $\frac{2\,\mathrm{tang}\frac{a}{2}}{1} + \frac{4\,\mathrm{tang}\frac{a}{4}}{2^{4\sin\frac{1}{2}}} + \frac{8\,\mathrm{tang}\frac{a}{8}}{3^{6\sin\frac{1}{3}}} + \frac{16\,\mathrm{tang}\frac{a}{16}}{4^{8\sin\frac{1}{4}}} + \ldots\ldots$

125) $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{5}}}\cdot\frac{1+2x}{1+3x} + \frac{1}{3^{\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{9}}}\cdot\frac{2+2x}{2+3x} + \frac{1}{4^{\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{13}}}\cdot\frac{3+2x}{3+3x} +$
$+ \frac{1}{5^{\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{17}}}\cdot\frac{4+2x}{4+3x} + \ldots\ldots$

126) $\frac{1}{2^{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{5}}} + \frac{1}{3^{\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{9}}}\left(\frac{2+2x}{2+3x}\right)^{12} + \frac{1}{4^{\frac{7}{4}\cdot\frac{11}{13}}}\left(\frac{3+2x}{3+3x}\right)^{13} +$
$+ \frac{1}{5^{\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{17}}}\left(\frac{4+2x}{4+3x}\right)^{14} + \ldots\ldots$

127) $\frac{1}{2^3} + \frac{2^{\cos 2x}}{3^3} + \frac{3^{\cos 3x}}{4^3} + \frac{4^{\cos 4x}}{5^3} + \ldots\ldots$

128) $\frac{a^{\sin x} - 1}{1\,\mathrm{tang}\,x} + \frac{a^{\sin\frac{x}{2}} - 1}{2^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{tang}\frac{x}{2}} + \frac{a^{\sin\frac{x}{3}} - 1}{3^{\frac{7}{4}}\,\mathrm{tang}\frac{x}{3}} + \frac{a^{\sin\frac{x}{4}} - 1}{4^{\frac{9}{5}}\,\mathrm{tang}\frac{x}{4}} + \ldots$

129) $\frac{e^{\sqrt{e^x}}}{2^2} + \frac{e^{\sqrt[3]{e^{2x}}}}{3^2} + \frac{e^{\sqrt[4]{e^{3x}}}}{4^2} + \frac{e^{\sqrt[5]{e^{4x}}}}{5^2} + \ldots\ldots$

Man entscheide über die Convergenz oder Divergenz folgender Reihen und bediene sich hierzu je nach Erforderniss des einen oder des anderen der Ausdrücke

$$n\,l n - (n+1)\,l(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

$$n\,l n\,l l(n+1) - (n+1)\,l(n+1)\,l l(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

$$n\,l n\,.\,l l n\,.\,l l l n - (n+1)\,l(n+1)\,l l(n+1)\,l l l(n+1)\,\frac{u_{n+1}}{u_n},$$

etc.

130) $1 + \frac{1}{2} \frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2} + \frac{1}{3} \frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2} \frac{l\left(\frac{2}{\sqrt[9]{e^2}}\right)}{l3} +$

$+ \frac{1}{4} \frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2} \frac{l\left(\frac{2}{\sqrt[9]{e^2}}\right)}{l3} \frac{l\left(\frac{3}{\sqrt[19]{e^3}}\right)}{l4} +$

$+ \frac{1}{5} \frac{l\left(\frac{1}{\sqrt[5]{e}}\right)}{l2} \frac{l\left(\frac{2}{\sqrt[9]{e^2}}\right)}{l3} \frac{l\left(\frac{3}{\sqrt[19]{e^3}}\right)}{l4} \frac{l\left(\frac{4}{\sqrt[33]{e^4}}\right)}{l5} + \ldots\ldots$

131) $1 + \frac{7}{3.2^2} \frac{l2}{l3} + \frac{7.26}{3.2^2.4.3^2} \frac{l3}{l4} + \frac{7.26.63}{3.2^2.4.3^2.5.4^2} \frac{l4}{l5} +$

$+ \frac{7.26.63.124}{3.2^2.4.3^2.5.4^2.6.5^2} \frac{l5}{l6} + \ldots\ldots$

132) $1 + \frac{1}{2} \frac{l\left(\frac{5}{3}\right)}{l2} + \frac{1}{2.3} \frac{l\left(\frac{5}{3}\right)}{l2} \cdot \frac{l\left(\frac{8.2^2}{5}\right)}{l3} \frac{l\left(\frac{11.3^3}{7}\right)}{l4} +$

$+ \frac{1}{2.3.4.5} \frac{l\left(\frac{5}{3}\right)}{l2} \cdot \frac{l\left(\frac{8.2^2}{5}\right)}{l3} \cdot \frac{l\left(\frac{11.3^3}{7}\right)}{l4} \cdot \frac{l\left(\frac{14.4^4}{9}\right)}{l5} + \ldots$

133) $1 + \frac{3}{4} \frac{l\left(\frac{3}{e}\right)}{l4} + \frac{3}{5} \frac{l\left(\frac{3}{e}\right) \, l\left(\frac{4}{e}\right)}{l4 \, . \, l5} +$

$+ \frac{3}{6} \frac{l\left(\frac{3}{e}\right) \, l\left(\frac{4}{e}\right) \, l\left(\frac{5}{e}\right)}{l4 \, . \, l5 \, . \, l6} + \ldots$

134) $1 + \frac{1}{2l2} \, l\left(\frac{1}{2+x}\right) + \frac{1}{2l2 \, . \, 3l3} \, l\left(\frac{1}{2+x}\right) l\left(\frac{2^2}{2+\frac{x}{2}}\right) +$

$+ \frac{1}{2l2 \, . \, 3l3 \, . \, 4l4} \, l\left(\frac{1}{2+x}\right) l\left(\frac{2^2}{2+\frac{x}{2}}\right) l\left(\frac{3^3}{2+\frac{x}{3}}\right) + \ldots\ldots$

135) $1 + \frac{1}{2} \frac{l\left(\frac{1}{1+x}\right)}{l2} + \frac{1}{3} \frac{l\left(\frac{1}{1+x}\right)}{l3} \frac{l\left(\frac{4}{2+x}\right)}{l3} +$

$+ \frac{1}{4} \frac{l\left(\frac{1}{1+x}\right)}{l2} \frac{l\left(\frac{4}{2+x}\right)}{l3} \frac{l\left(\frac{9}{3+x}\right)}{l4} + \ldots\ldots$

136) $1+\frac{l\sec x}{l2^2}+\frac{l\sec x}{l2^2}\cdot\frac{l2^2\sec x}{l3^3}+$
$+\frac{l\sec x}{l2^2}\cdot\frac{l2^2\sec x}{l3^3}\cdot\frac{l3^3\sec x}{l4^4}+\ldots.$

137) $1+\frac{1}{2^2}\frac{l\left(\frac{1}{e^{\cos x}}\right)}{l2}+\frac{1}{2.3^2}\frac{l\left(\frac{1^2}{e^{\cos x}}\right)}{l2}\frac{l\left(\frac{2^3}{e^{\cos x}}\right)}{l3}+$
$+\frac{1}{2.3.4^2}\frac{l\left(\frac{1^2}{e^{\cos x}}\right)}{l2}\frac{l\left(\frac{2^3}{e^{\cos x}}\right)}{l3}\frac{l\left(\frac{3^4}{e^{\cos x}}\right)}{l4}+$
$+\frac{1}{2.3.4.5^2}\frac{l\left(\frac{1^2}{e^{\cos x}}\right)}{l2}\frac{l\left(\frac{2^3}{e^{\cos x}}\right)}{l3}\frac{l\left(\frac{3^4}{e^{\cos x}}\right)}{l4}\frac{l\left(\frac{4^5}{e^{\cos x}}\right)}{l5}+\ldots$

138) $1+(1-\cos x)+(1-\cos x)\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)+$
$+(1-\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)+$
$+(1-\cos x)\left(1-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\cos\frac{x}{4}\right)+\ldots..$

Bei folgenden Reihen lässt sich der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ auf die Form $\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\gamma}{n^2}$ bringen; man entscheide aus der Beschaffenheit von α und β über die Convergenz oder Divergenz der Reihen.

139) $1+\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}.\sqrt{7}}+\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}}{\sqrt{6}.\sqrt{7}.\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{2}.\sqrt{3}.\sqrt{4}}{\sqrt{6}.\sqrt{7}.\sqrt{8}.\sqrt{9}}+\ldots.$

140) $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{\sqrt{4}}+$
$+\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots$

141) $1+\frac{1}{\sqrt[3]{5}}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{6}}+\frac{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{7}}+\frac{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{3}.\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}.\sqrt[3]{6}.\sqrt[3]{7}.\sqrt[3]{8}}+\ldots.$

142) $1+\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{4}}+\frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{2.3}{4.5}}+\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{2.3}{5.6}}+\ldots...$

$$143)\ 1+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{5}}+\frac{\sqrt[3]{2.3}}{\sqrt{5.6}}\sqrt[6]{2}+\frac{\sqrt[3]{2.3.4}}{\sqrt{5.6.7}}\sqrt[6]{3}+$$
$$+\frac{\sqrt[3]{2.3.4.5}}{\sqrt{5.6.7.8}}\sqrt[6]{4}+\ldots.$$

$$144)\ 1+\frac{1}{2}\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt{7}}+\frac{\sqrt[6]{2}}{3}\frac{\sqrt[3]{9.17}}{\sqrt{7.11}}+\frac{\sqrt[6]{3}}{4}\frac{\sqrt[3]{9.17.25}}{\sqrt{7.11.15}}+$$
$$+\frac{\sqrt[6]{4}}{5}\frac{\sqrt[3]{9.17.25.33}}{\sqrt{7.11.15.19}}+\ldots.$$

$$145)\ 1+\frac{2}{1.2}\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{a}}}+\frac{2.5}{1.2.2.3}\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)}+$$
$$+\frac{2.5.10}{1.2.2.3.3.4}\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{3\sqrt{a}}\right)}+$$
$$+\frac{2.5.10.17}{1.2.2.3.3.4.4.5}\sqrt{\left(1-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{2\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{3\sqrt{a}}\right)\left(1-\frac{1}{4\sqrt{a}}\right)}+\ldots$$

$$146)\ 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{e^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}}+\frac{1}{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}}+\frac{1}{e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}}+\ldots..$$

$$147)\ 1+\frac{1}{e}+\frac{1}{2e^{\left(1+\frac{1}{2}\right)}}+\frac{1}{3e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)}}+\frac{1}{4e^{\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}}+\ldots$$

$$148)\ 1+1\cdot\frac{2}{1.3}\sin 1+1.2\cdot\frac{2\ .\ 5}{1.3.2.4}\sin 1\cdot\sin\frac{1}{2}+$$
$$+1.2.3\cdot\frac{2\ .\ 5\ .\ 10}{1.3.2.4.3.5}\cdot\sin 1\cdot\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}+$$
$$+1.2.3.4\cdot\frac{2\ .\ 5\ .\ 10.17}{1.3.2.4.3.5.4.6}\sin 1\cdot\sin\frac{1}{2}\sin\frac{1}{3}\sin\frac{1}{4}+\ldots..$$

$$149)\ 1+\cos\frac{1}{2}+\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}+\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cos\frac{1}{6}+$$
$$+\cos\frac{1}{2}\cos\frac{1}{4}\cos\frac{1}{6}\cos\frac{1}{8}+\ldots.$$

$$150)\ 1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{3}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}+$$
$$+\frac{1}{5}\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{4}+\ldots..$$

Man beurtheile noch folgende Reihen bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz:

151) $1 + \frac{1}{1.3} + \frac{1.2}{3.5} + \frac{1.2.3}{3.5.7} + \frac{1.2.3.4}{3.5.7.9} + \dots$

152) $\frac{1}{1^2.3^2} + \frac{2}{3^2.5^2} + \frac{3}{5^2.7^2} + \frac{4}{7^2.9^2} + \dots$

153) $\frac{2}{1.3.5.7} + \frac{3}{3.5.7.9} + \frac{4}{5.7.9.11} + \frac{5}{7.9.11.13} + \dots$

154) $\frac{7}{1.1.5} + \frac{19}{4.5.17} + \frac{31}{7.9.29} + \frac{43}{10.13.41} + \dots$

155) $1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{3} - \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.1}{7.9}\cdot\frac{3.\ 5}{3.11} - \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1.1.\ 3}{7.9.11}\cdot\frac{3.\ 5.\ 7}{3.11.19} + \dots$

156) $1 + \frac{1}{1.4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3.7}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 +$

$+ \frac{1}{5.10}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 - \frac{1}{7.13}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\right)^2 + \dots$

157) $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) - \frac{1}{8}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) + \dots$

158) $\frac{1}{(4a^2 + 1^2)(4a^2 + 3^2)} + \frac{2}{(4a^2 + 3^2)(4a^2 + 5^2)} +$

$+ \frac{3}{(4a^2 + 5^2)(4a^2 + 7^2)} + \frac{4}{(4a^2 + 7^2)(4a^2 + 9^2)} + \dots$

159) $\frac{1}{a^2.(a^2 + 2^2)} + \frac{3}{(a^2 + 4.2^2)(a^2 + 6^2)} + \frac{5}{(a^2 + 4.3^2)(a^2 + 8^2)} +$

$+ \frac{7}{(a^2 + 4.4^2)(a^2 + 10^2)} + \dots$

160) $\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m^2} C_1^{m-1} + \frac{1}{m(m+1)^2} C_2^{m} +$

$+ \frac{1}{m(m+1)(m+2)^2} C_3^{m+1} + \dots$ *)

161) $1 - (2m)_1 \frac{(p)_1}{(2p)_1} \cdot 2 + (2m)_2 \frac{(p)_2}{(2p)_2} 2^2 - (2m)_3 \frac{(p)_3}{(2p)_3} 2^3 +$

$+ (2m)_4 \frac{(p)_4}{(2p)_4} 2^4 - \dots$

---

*) C_s^k bezeichnet die Summe der Combinationen s^{ter} Klasse ohne Wiederholungen aus den Elementen $1, 2, \dots, k$, wobei jede Combination als Produkt gilt.

162, $\left(\frac{A}{a} + \frac{A_1}{a_1} + \frac{A_2}{a_2}\right) + \left(\frac{A}{a+i} + \frac{A_1}{a_1+i_1} + \frac{A_2}{a_2+i_2}\right) +$
$+ \left(\frac{A}{a+2i} + \frac{A_1}{a_1+2i_1} + \frac{A_2}{a_2+2i_2}\right) +$
$+ \left(\frac{A}{a+3i} + \frac{A_1}{a_1+3i_1} + \frac{A_2}{a_2+3i_2}\right) +$
$+ \left(\frac{A}{a+4i} + \frac{A_1}{a_1+4i_1} + \frac{A_2}{a_2+4i_2}\right) + \ldots.$

163, $\frac{1}{l\left(1+\frac{1}{1}\right)} + \frac{1}{l\left(2+\frac{1}{2}\right)} + \frac{1}{l\left(3+\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{l\left(4+\frac{1}{4}\right)} +$
$+ \frac{1}{l\left(5+\frac{1}{5}\right)} + \ldots.$

164, $\left[l\left(1+\frac{1}{p+1}\right) - \frac{2p+1}{(p+1)(2p+3)}\right] +$
$+ \left[l\left(1+\frac{1}{p+2}\right) - \frac{2p+3}{(p+2)(2p+5)}\right] +$
$+ \left[l\left(1+\frac{1}{p+3}\right) - \frac{2p+5}{(p+3)(2p+7)}\right] +$
$+ \left[l\left(1+\frac{1}{p+4}\right) - \frac{2p+7}{(p+4)(2p+9)}\right] + \ldots.$

165) $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1.2.x^2}{(1+x)(1+2x)(1+3x)} +$
$+ \frac{1}{4} \cdot \frac{1.2.3.x^3}{(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)} + \ldots.$

166) $1 + \frac{1-x}{1+x} + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4 + \ldots..$

167) $1 + \frac{1-x}{1+x}\,x + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 x^3 +$
$+ \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^4 x^4 + \ldots$

168) $\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \frac{x^5}{1-x^5} + \ldots.$

169) $\frac{1+x}{1-x} \cdot x + \frac{1+x^2}{1-x^2}\,x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3}\,x^9 + \frac{1+x^4}{1-x^4}\,x^{16} + \ldots..$

170) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x+2)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2^2}{(x+3)^3} + \frac{1}{4}\cdot\frac{3^3}{(x+4)^4} + \ldots\ldots$

171) $\frac{1}{x} - \frac{a}{x(x+1)} + \frac{a(a-1)}{x(x+1)(x+2)} - \frac{a(a-1)(a-2)}{x(x+1)(x+2)(x+3)} +$
$+ \frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} + \ldots$

172) $x(1-x) + \frac{1}{2}x^2(1-x^2) + \frac{1}{3}x^3(1-x^3) +$
$+ \frac{1}{4}x^4(1-x^4) + \ldots.$

173) $\frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1.3}{2.4}x^2(1-x^2) + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3(1-x^3) +$
$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4(1-x^4) + \ldots$

174) $\frac{1}{2x} - \frac{x}{1^2-x^2} - \frac{x}{2^2-x^2} - \frac{x}{3^2-x^2} - \frac{x}{4^2-x^2} - \ldots.$

175) $\frac{1}{x^2+1} + \frac{a^2}{2!}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right) + \frac{a^4}{4!}\left(x^2-1+\frac{1}{x^2+1}\right) -$
$-\frac{a^6}{6!}\left(x^4-x^2+\frac{1}{x^2+1}\right) + \ldots$

176) $\left(x-\frac{x^3}{3}\right) - \left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\right) - \left(\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}\right) -$
$-\left(\frac{x^{13}}{13}-\frac{x^{15}}{15}\right) - \left(\frac{x^{17}}{17}-\frac{x^{19}}{19}\right) - \ldots.$

177) $\left(x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right) + \left(\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}-\frac{x^{11}}{11}\right) +$
$+\left(\frac{x^{13}}{13}-\frac{x^{15}}{15}-\frac{x^{17}}{17}\right) + \left(\frac{x^{19}}{19}-\frac{x^{21}}{21}-\frac{x^{23}}{23}\right) + \ldots$

178) $\frac{2x}{\pi} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\pi}\left[1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right] +$
$+\frac{1}{5}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{2x}{\pi}\left[1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2\right] +$
$+\frac{1}{7}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{2x}{\pi}\left[1-\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{3\pi}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{2x}{5\pi}\right)^2\right] + \ldots$

179) $$\frac{x}{\frac{\pi}{2}} - \frac{2x}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^3} \frac{\left[x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]}{2.3} +$$

$$+ \frac{2x^3}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5} \frac{\left[x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\right]}{2.3 \quad . \quad 4.5} -$$

$$- \frac{2x^3}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^7} \frac{\left[x^2 - \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2\right]\left[x^2 - \left(\frac{3\pi}{2}\right)^2\right]}{2.3 \quad . \quad 4.5 \quad . \quad 6.7} + \cdots$$

180) $$1 + (m)_1 \frac{\alpha}{x}\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^{m-1} + (m)_2 \frac{\alpha}{x}\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{2\beta}{x}\right)\left(1 + \frac{2\beta}{x}\right)^{m-2} +$$

$$+ (m)_3 \frac{\alpha}{x}\left(\frac{\alpha}{x} - \frac{3\beta}{x}\right)\left(1 + \frac{3\beta}{x}\right)^{m-3} + \cdots\cdots$$

181) $$\left(\frac{a^{\frac{\pi x}{2}} - a^{-\frac{\pi x}{2}}}{a^{\frac{\pi}{2}} + a^{-\frac{\pi}{2}}}\right) - \left(\frac{a^{\frac{3\pi x}{2}} - a^{-\frac{3\pi x}{2}}}{a^{\frac{3\pi}{2}} + a^{-\frac{3\pi}{2}}}\right) +$$

$$+ \left(\frac{a^{\frac{5\pi x}{2}} - a^{-\frac{5\pi x}{2}}}{a^{\frac{5\pi}{2}} + a^{-\frac{5\pi}{2}}}\right) - \left(\frac{a^{\frac{7\pi x}{2}} - a^{-\frac{7\pi x}{2}}}{a^{\frac{7\pi}{2}} + a^{-\frac{7\pi}{2}}}\right) + \cdots$$

182) $$\frac{xe^{xe^x}}{1} + \frac{x^2 e^{2xe^{2x}}}{2!} + \frac{x^3 e^{3xe^{3x}}}{3!} + \frac{x^4 e^{4xe^x}}{4!} + \cdots\cdots$$

183) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) - \cdots$$

184) $$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{2^2} \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{1}{(x+1)(x+2)}\right] -$$

$$- \frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{(x+2)(x+3)}\right] + \cdots$$

185) $$(m)_0 + \frac{(m)_1}{1-x} + \frac{(m)_2}{1-2x} + \frac{(m)_3}{1-3x} + \frac{(m)_4}{1-4x} + \cdots\cdots$$

186) $$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{x}{x+2} + \frac{1}{3}\frac{x}{x+3} + \frac{1}{4}\frac{x}{x+4} + \cdots\cdots$$

187) $1-\left(\frac{x}{2}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\,x^2\right)^2-\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^3\right)^2-$
$-\frac{1}{7}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\,x^4\right)^2-\ldots..$

188) $1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{x^3}\right)^2+$
$+\frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{1}{x^4}\right)^2+\ldots..$

189) $\frac{1}{a^{x\sqrt{\lg 2}}}+\frac{1}{a^{x\sqrt{\lg 2}}}+\frac{1}{a^{x\sqrt{\lg 3}}}+\frac{1}{a^{x\sqrt{\lg 4}}}+\ldots..$

190) $\frac{\sin x}{1^x}+\frac{\sin\frac{x}{2}}{2^x}+\frac{\sin\frac{x}{3}}{3^x}+\frac{\sin\frac{x}{4}}{4^x}+\ldots..$

191) $1-\frac{x^2}{1!\,1!}+\frac{x^4}{2!\,2!}-\frac{x^6}{3!\,3!}+\frac{x^8}{4!\,4!}-\ldots.$

192) $\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{1!\,2!}+\frac{x^5}{2!\,3!}-\frac{x^7}{3!\,4!}+\frac{x^9}{4!\,5!}-\ldots.$

193) $\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{1!\,3!}+\frac{x^6}{2!\,4!}-\frac{x^8}{3!\,5!}+\frac{x^{10}}{4!\,6!}-\ldots.$

194) $1+\frac{1}{2^2}x^2+\frac{1\,.1}{2^2.4^2}x^4+\frac{1\,.1\,.3^2}{2^2.4^2.6^2}x^6+\frac{1\,.1\,.3^2.5^2}{2^2.4^2.6^2.8^2}x^8+\ldots.$

195) $\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{4}\,x^3+\frac{1\,.1}{2^2.4^2}\cdot\frac{3}{6}\,x^5+\frac{1\,.1\,.3^2}{2^2.4^2.6^2}\cdot\frac{5}{8}\,x^7+\ldots.$

196) $\frac{3^3-3}{4}\cdot\frac{x^3}{3!}-\frac{3^5-3}{4}\cdot\frac{x^5}{5!}+\frac{3^7-3}{4}\cdot\frac{x^7}{7!}-\frac{3^9-3}{4}\cdot\frac{x^9}{9!}+\ldots.$

197) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{1!\,2!}+\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]\frac{x^3}{2!\,3!}+$
$+\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)\right]\frac{x^4}{3!\,4!}+$
$+\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)\right]\frac{x^5}{4!\,5!}+\ldots.$

198) $x^2-\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)x^3+\frac{2}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^4-$
$-\frac{2}{5}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)x^5+$
$+\frac{2}{6}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)x^6-\ldots...$

199) $1 + \frac{4.2}{3.5}\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) x^2 + \frac{4.6}{5.7} \cdot \frac{2}{4}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) x^4 +$
$+ \frac{4.6.8}{5.7.9} \cdot \frac{2}{5}\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) x^6 + \ldots\ldots$

200) $x^3 + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5}\left(1 + \frac{1}{3^2}\right) x^5 + \frac{3.5}{4.6} \cdot \frac{3}{7}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2}\right) x^7 +$
$+ \frac{3.5.7}{4.6.8} \cdot \frac{3}{9}\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2}\right) x^9 + \ldots\ldots$

201) $1 + \left(\frac{3}{2^2} - 1\right) x^2 + \left(\frac{3^2.5}{2^2.4^2} - \frac{3}{2^2}\right) x^4 +$
$+ \left(\frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2} - \frac{3^2.5}{2^2.4^2}\right) x^6 + \left(\frac{3^2.5^2.7^2.9}{2^2.4^2.6^2.8^2} - \frac{3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2}\right) x^8 + \ldots\ldots$

202) $1 - \frac{k}{1} \cdot \frac{x}{4} + \frac{k(k+3)}{1.2} \frac{x^2}{16} - \frac{k(k+4)(k+5)}{1.2.3} \frac{x^3}{64} +$
$+ \frac{k(k+5)(k+6)(k+7)}{1.2.3.4} \frac{x^4}{256} -$
$- \frac{k(k+6)(k+7)(k+8)(k+9)}{1.2.3.4.5} \frac{x^5}{1024} + \ldots\ldots$

203) $1 - \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{2x^2}{1.2} + \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} \frac{2^3 x^4}{1.2.3.4} -$
$- \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} \frac{2^5 x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots\ldots$

204) $\frac{x}{1} - \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+2)} \cdot \frac{2^2 x^3}{3!} +$
$+ \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)} \cdot \frac{2^4 x^5}{5!} -$
$- \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)(k+5)(k+6)}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)(2k+4)(2k+5)(2k+6)} \cdot \frac{2^6 x^7}{7!} + \ldots\ldots$

205) $1 + (m-1)_1 x + (m-2)_2 x^2 + (m-3)_3 x^3 +$
$+ (m-4)_4 x^4 + \ldots\ldots$

206) $\frac{a^2(b-1)}{1!\,2!} x^2 + \frac{a^3(b^2-1)}{2!\,3!} x^3 + \frac{a^4(b^3-1)}{3!\,4!} x^4 +$
$+ \frac{a^5(b^4-1)}{4!\,5!} x^5 + \ldots\ldots$

$$207)\quad 1 + m\frac{(m+\beta)}{1}x + \frac{m(m+\alpha+\beta)(m+2\beta)}{1.2}x^2 + $$
$$+ \frac{m(m+2\alpha+\beta)(m+\alpha+2\beta)}{1.2.3}x^3 + $$
$$+ \frac{m(m+3\alpha+\beta)(m+2\alpha+2\beta)(m+\alpha+3\beta)}{1.2.3.4}x^4 + \ldots.$$

$$208)\quad \frac{x}{a_0 + a_1 + a_2 + \ldots. a_p} + \frac{x^2}{a_0 2^p + a_1 2^{p-1} + a_2 2^{p-2} + \ldots a_p} + $$
$$+ \frac{x^3}{a_0 3^p + a_1 3^{p-1} + a_2 3^{p-2} + \ldots. + a_p} + $$
$$+ \frac{x^4}{a_0 4^p + a_1 4^{p-1} + a_2 4^{p-2} + \ldots. + a_p} + \ldots\ldots$$

$$209)\quad (a+b)(c+e)x^\alpha + (2a+b)(2c+e)x^{\alpha+\beta} + $$
$$+ (3a+b)(3c+e)x^{\alpha+2\beta} + (4a+b)(4c+e)x^{\alpha+3\beta} + \ldots.$$

$$210)\quad 1 - h\cdot\frac{a}{x} + \frac{h^2}{1.2}\cdot\frac{a(a+1)}{x^2} - \frac{h^3}{1.2.3}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)}{x^3} + $$
$$+ \frac{h^4}{1.2.3.4}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{x^4} - \ldots.$$

$$211)\quad \frac{a}{1}\cdot\frac{x}{1-a} + \frac{a+1}{1}\cdot h - \frac{(a+2)}{1}\cdot\frac{a}{x}\cdot\frac{h^2}{1.2} + $$
$$+ \frac{a+3}{1}\cdot\frac{a(a+1)}{x^2}\cdot\frac{h^3}{1.2.3} + \frac{a+4}{1}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)}{x^3}\cdot\frac{h^4}{1.2.3.4} - $$
$$- \frac{a+5}{1}\cdot\frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{x^4}\cdot\frac{h^5}{1.2.3.4.5} + \ldots$$

$$212)\quad \frac{a(a-1)}{1.2}\cdot\frac{x^2}{(1-a)(2-a)} + \frac{(a+1)a}{1.2}\cdot\frac{x}{1-a}\cdot h + $$
$$+ \frac{(a+2)(a+1)}{1.2}\,\frac{h^2}{1.2} - \frac{(a+3)(a+2)}{1.2}\,\frac{a}{x}\,\frac{h^3}{1.2.3} + \ldots..$$

$$213)\quad 1 \mp \frac{a+2}{2}\left(\frac{a}{2}\right)_1\cdot\frac{1}{2bx} + \frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\left(\frac{a}{2}\right)_2\cdot\frac{1}{4b^2x^2} \mp $$
$$\mp \frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\cdot\frac{a+6}{2}\left(\frac{a}{2}\right)_3\cdot\frac{1}{8b^3x^3} + $$
$$+ \frac{a+2}{2}\cdot\frac{a+4}{2}\cdot\frac{a+6}{2}\cdot\frac{a+8}{2}\left(\frac{a}{2}\right)_4\cdot\frac{1}{16b^4x^4} \mp \ldots.$$

214) $x^a - \frac{a(a+1)}{2.b} x^{a-1} + \frac{a(a^2-1)(a+2)}{2.2^2.b^2} x^{a-2} -$

$- \frac{a(a^2-1)(a^2-4)(a+3)}{2.3.2^3.b^3} x^{a-3} +$

$+ \frac{a(a^2-1)(a^2-4)(a^2-9)(a+4)}{2.3.4.2^4.b^4} x^{a-4} - \ldots\ldots$

215) $1 - \frac{1^2.2^2}{4.8}\left(\frac{1}{4x}\right)^2 + \frac{1^2.3^2.\ 5^2.\ 7^2}{4.8.12.16}\left(\frac{1}{4x}\right)^4 -$

$- \frac{1^2.3^2.\ 5^2.\ 7^2.\ 9^2.11^2}{4.8.12.16.20.24}\left(\frac{1}{4x}\right)^6 + \ldots\ldots$

216) $\frac{x}{1+x} + \frac{2}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots$

217) $\frac{2-1}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{2^2-1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{2^3-1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 +$

$+ \frac{2^4-1}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots\ldots$

218) $\frac{1}{a}\left(\frac{x}{1+x}\right) + \frac{b}{a(a+b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 +$

$+ \frac{b.2b}{a(a+b)(a+2b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 +$

$+ \frac{b.2b.3b}{a(a+b)(a+2b)(a+3b)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots\ldots$

219) $C_3^3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{C_3^4}{4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \frac{C_3^5}{4.5}\left(\frac{x}{1+x}\right)^5 +$

$+ \frac{C_3^6}{4.5.6}\left(\frac{x}{1+x}\right)^6 + \ldots\ldots$

220) $1 + \frac{m.m}{2.4}\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + \frac{(m+2)m.m(m-2)}{2.4.6.8}\left(x - \frac{1}{x}\right)^4 +$

$+ \frac{(m+4)(m+2)m.m(m-2)(m-4)}{2.4.6.8.10.12}\left(x - \frac{1}{x}\right)^6 + \ldots$

221) $\frac{m}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) + \frac{(m+1)m(m-1)}{2.4.6}\left(x - \frac{1}{x}\right)^3 +$

$+ \frac{(m+3)(m+1)m(m-1)(m-3)}{2.4.6.8.10}\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 + \ldots$

$$222)\quad 1 - \frac{(n)_1}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right) + \frac{1.3\,(n)_2}{(2n-1)\,(2n-3)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 -$$

$$- \frac{1.3.5\,(n)_3}{(2n-1)\,(2n-3)\,(2n-5)}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \ldots.$$

$$223)\quad \frac{x}{1+x^2} + \frac{2}{2}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^3 + \frac{2.6}{2.3}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^5 +$$

$$+ \frac{2.6.10}{2.3.\;4}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)^7 + \ldots.$$

$$224)\quad \frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} + \frac{2}{2}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)^3 + \frac{2.6}{2.3}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)^5 +$$

$$+ \frac{2.6.10}{2.3.\;4}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)^7 + \ldots.$$

$$225)\quad \frac{l(1+x)}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\overline{l(1+x)}^2}{1.2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\overline{l(1+x)}^3}{1.2.3} +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{\overline{l(1+x)}^4}{1.2.3.4} + \ldots.$$

$$226)\quad 1 + \frac{n}{1}\left[1 - \frac{l(1+x)}{x}\right] + \frac{n\,(n+1)}{1.2}\left[1 - \frac{l(1+x)}{x}\right]^2 +$$

$$+ \frac{n\,(n+1)\,(n+2)}{1.2.3}\left[1 - \frac{l(1+x)}{x}\right]^3 + \ldots$$

$$227)\quad x\cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}\,x^3\cos 3\varphi +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^4\cos 4\varphi + \ldots$$

$$228)\quad x\cos\varphi + \frac{1}{1.2}\,x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}\,x^3\cos 3\varphi +$$

$$+ \frac{1}{3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}\,x^4\cos 4\varphi + \ldots$$

$$229)\quad x\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}\,x^3\sin 3\varphi +$$

$$+ \frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\,x^4\sin 4\varphi + \ldots$$

230) $x \sin \varphi + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{1} x^2 \sin 2\varphi + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{2} x^3 \sin 3\varphi +$
$+ \frac{1}{3.4} \cdot \frac{1.3}{2.4} x^4 \sin 4\varphi + \ldots$

231) $\frac{1}{2x} + \frac{x \cos \varphi}{1^2 - x^2} - \frac{x \cos 2\varphi}{2^2 - x^2} + \frac{x \cos 3\varphi}{3^2 - x^2} - \frac{x \cos 4\varphi}{4^2 - x^2} + \ldots\ldots$

232) $\frac{1}{2x} - \frac{x \cos \varphi}{1^2 + x^2} + \frac{x \cos 2\varphi}{2^2 + x^2} - \frac{x \cos 3\varphi}{3^2 + x^2} + \frac{x \cos 4\varphi}{4^2 + x^2} - \ldots\ldots$

233) $\frac{1}{\pi^2 + h^2} \cos \frac{\pi x}{h} - \frac{1}{(2\pi)^2 + h^2} \cos \frac{2\pi x}{h} + \frac{1}{(3\pi)^2 + h^2} \cos \frac{3\pi x}{h} - \ldots$

234) $\frac{1}{2} + e^{-\left(\frac{1}{2a}\right)^2} \cos x + e^{-\left(\frac{2}{2a}\right)^2} \cos 2x +$
$+ e^{-\left(\frac{3}{2a}\right)^2} \cos 3x + e^{-\left(\frac{4}{2a}\right)^2} \cos 4x + \ldots$

235) $1 + 2e^{-a} \cos 2x + 2e^{-4a} \cos 4x + 2e^{-9a} \cos 6x +$
$+ 2e^{-16a} \cos 4x + \ldots.$

236) $1 - \frac{1}{2} \frac{x^2 \cos 2\varphi}{2!} + \frac{1}{3} \frac{x^4 \cos 4\varphi}{4!} - \frac{1}{4} \frac{x^6 \cos 6\varphi}{6!} +$
$+ \frac{1}{5} \frac{x^8 \cos 8\varphi}{8!} - \ldots$

237) $1 - \frac{1}{2} \frac{x^2 \sin 2\varphi}{2!} + \frac{1}{3} \frac{x^4 \sin 4\varphi}{4!} - \frac{1}{4} \frac{x^6 \sin 6\varphi}{6!} +$
$+ \frac{1}{5} \frac{x^8 \sin 8\varphi}{8!} - \ldots$

238) $\frac{\cos a\varphi}{x^a} + \frac{\cos (a+b)\varphi}{x^{a+b}} + \frac{\cos (a+2b)\varphi}{x^{a+2b}} + \frac{\cos (a+3b)\varphi}{x^{a+3b}} +$
$+ \frac{\cos (a+4b)\varphi}{x^{a+4b}} + \ldots\ldots$

239) $\frac{x \cos x}{1} + 1^1 \cdot \frac{x^2 \sin 2x}{2} - 2^2 \cdot \frac{x^3 \cos 3x}{1.2.3} - 3^3 \cdot \frac{x^4 \sin 4x}{1.2.3.4} + \ldots$

240) $1 - \frac{x \sin x}{1} - 1^1 \cdot \frac{x^2 \cos 2x}{1.2} + 2^2 \cdot \frac{x^3 \sin 3x}{1.2.3} +$
$+ 3^3 \cdot \frac{x^4 \cos 4x}{1.2.3.4} - \ldots$

Man zeige, dass bei folgenden Reihen die Summe einer geraden Anzahl von Gliedern sich einer andern Grenze nähere, als die Summe einer ungeraden Anzahl von Gliedern und bestimme den Unterschied dieser Grenzen.

241) $1 - \frac{1.6}{2.5} + \frac{1.6}{2.5} \cdot \frac{2.7}{3.6} - \frac{1.6}{2.5} \cdot \frac{2.7}{3.6} \cdot \frac{3.8}{4.7} + \dots$

242) $1 - \frac{2.5}{3.4} + \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} - \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \cdot \frac{4.7}{5.6} + \dots$

243) $1 - \frac{2.6}{3.5} + \frac{2.6}{3.5} \cdot \frac{3.7}{4.6} - \frac{2.6}{3.5} \cdot \frac{3.7}{4.6} \cdot \frac{4.8}{5.7} + \dots$

244) $(1 + 1) + \left(\frac{1}{2} - 1\right) + \left(\frac{1}{2^2} + 1\right) + \left(\frac{1}{2^3} - 1\right)$

245) $1 - \frac{a+2}{b+2} \cdot \frac{b+3}{a+3} + \frac{a+2}{b+2} \cdot \frac{b+4}{a+4} - \frac{a+2}{b+2} \cdot \frac{b+5}{a+5} + \dots$

246) $1 - \frac{a+2}{a+4} + \frac{a+4}{a+6} - \frac{a+6}{a+8} + \frac{a+8}{a+10} - \dots$

247) $a^2 - a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{5}{4}} + a^{\frac{6}{5}} - \dots\dots \qquad \left(a > \frac{1}{4}\right)$

248) $l\left(\frac{4}{1}\right) - l\left(\frac{6}{2}\right) + l\left(\frac{8}{3}\right) - l\left(\frac{10}{4}\right) + l\left(\frac{12}{5}\right) - \dots$

249) $l(1) - l\left(\frac{a+1}{b+1}\right) + l\left(\frac{2a+1}{2b+1}\right) - l\left(\frac{3a+1}{3b+1}\right) +$
$+ l\left(\frac{4a+1}{4b+1}\right) - \dots$

250) $\sin 2 - \sin \frac{3}{2} + \sin \frac{4}{3} - \sin \frac{5}{4} + \sin \frac{6}{5} - \dots$

251) $1 - \sin\left(\frac{\pi+2}{\pi+3}\right) + \sin\left(\frac{\pi+4}{\pi+5}\right) - \sin\left(\frac{\pi+6}{\pi+7}\right) +$
$+ \sin\left(\frac{\pi+8}{\pi+9}\right) - \dots$

252) $\operatorname{arctang} \frac{1}{2} - \operatorname{arctang} \frac{2}{3} + \operatorname{arctang} \frac{3}{4} - \operatorname{arctang} \frac{4}{5} + \dots$

253) Die Reihen:

$$a)\ 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots.$$

$$b)\ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{8} -$$

$$- \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots.$$

entstehen aus der convergenten Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots..$$

durch eine andere Anordnung der Glieder; es frägt sich nun, ob die abgeleiteten Reihen ebenfalls convergiren, und wenn diess der Fall ist, ob sie dieselbe Summe wie die ursprüngliche Reihe besitzen.

254) Von der convergenten Reihe:

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots.. + \frac{1}{\sqrt{2r-1}} - \frac{1}{\sqrt{2r}} + \ldots..$$

unterscheidet sich die Reihe

$$1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots.$$

blos durch eine andere Aufeinanderfolge der Glieder; ist letztere ebenfalls convergent?

255) Sind die Reihen

$$1)\ \log\sqrt{2} + \log\sqrt[4]{4} - \log\sqrt[3]{3} + \log\sqrt[6]{6} + \log\sqrt[8]{8} -$$

$$- \log\sqrt[5]{5} + \ldots.$$

$$2)\ \log\sqrt{2} + \log\sqrt[4]{4} - \log\sqrt[3]{3} - \log\sqrt[5]{5} + \log\sqrt[6]{6} +$$

$$+ \log\sqrt[8]{8} - \log\sqrt[7]{7} - \log\sqrt[9]{9} + \ldots.$$

$$3)\ \log\sqrt{2} + \log\sqrt[4]{4} + \log\sqrt[6]{6} - \log\sqrt[3]{3} - \log\sqrt[5]{5} -$$

$$- \log\sqrt[7]{7} + \ldots.$$

$$4)\ \log\sqrt{2} + \log\sqrt[4]{4} + \log\sqrt[6]{6} - \log\sqrt[3]{3} - \log\sqrt[5]{5} +$$

$$+ \log\sqrt[8]{8} + \log\sqrt[10]{10} + \log\sqrt[12]{12} - \log\sqrt[7]{7} - \log\sqrt[9]{9} + \ldots.$$

welche sämmtlich aus der convergenten Reihe

$$\log \sqrt{2} - \log \sqrt[3]{3} + \log \sqrt[4]{4} - \log \sqrt[5]{5} + \ldots\ldots$$

durch Aenderung der Gliederfolge hervorgehen, convergent oder divergent, und besitzen sie im ersteren Falle dieselbe Summe wie die letztangegebene Reihe oder nicht?

256) Folgende Reihen

1) $\sin 1 + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{5} + \sin\frac{1}{7} - \sin\frac{1}{4} + \ldots\ldots$

2) $\sin 1 - \sin\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{4} + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{6} - \sin\frac{1}{8} +$
$+ \sin\frac{1}{5} - \ldots\ldots$

3) $\sin 1 + \sin\frac{1}{3} + \sin\frac{1}{5} - \sin\frac{1}{2} - \sin\frac{1}{4} + \sin\frac{1}{7} +$
$+ \sin\frac{1}{9} + \sin\frac{1}{11} - \ldots\ldots$

unterscheiden sich von einander und von der convergenten Reihe

$$\sin 1 - \sin\frac{1}{2} + \sin\frac{1}{3} - \sin\frac{1}{4} + \ldots\ldots$$

ebenfalls nur durch die Ordnung, in welcher die Glieder aufeinander folgen, und es ist wieder zu untersuchen, ob obige 3 Reihen ebenfalls und zwar gegen dieselbe Summe hin convergiren.

Folgende Sätze sind zu beweisen:

257) Wenn die Reihe

1) $\frac{u_1}{u_0} + \frac{u_2}{u_0 + u_1} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2} + \frac{u_4}{u_0 + u_1 + u_2 + u_3}$

convergirt, so convergirt auch die Reihe

2) $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots;$

dagegen ist die Reihe 2) divergent, wenn dasselbe mit der Reihe

$$\frac{u_1}{u_0 + u_1} + \frac{u_2}{u_0 + u_1 + u_2} + \frac{u_3}{u_0 + u_1 + u_2 + u_3} + \ldots$$

der Fall ist.

258) Die nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$$

ist mit $r_1 u_1 + r_2 u_2 + r_3 u_3 + r_4 u_4 + \ldots\ldots$ gleichzeitig convergent oder divergent, wenn r_n eine Funktion des Stellenzeigers n ist, welche stets positiv und endlich bleibt.

259) Die beiden nur positive Glieder enthaltenden Reihen

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots \quad \text{und}$$

$$u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + k^3 u_{k^3} + \ldots\ldots$$

sind gleichzeitig convergent oder divergent.

260) Um die nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz zu prüfen, berechne man der Reihe nach folgende Grenzwerthe:

$$A_1 = \lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{n} \right)$$

$$A_2 = \lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n u_n}\right)}{l n} \right)$$

$$A_3 = \lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n\, l n\, u_n}\right)}{l_2 n} \right)$$

$$A_4 = \lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{n\, l n\, l_2 n\, u_n}\right)}{l_3 n} \right) \quad \text{u. s. w.}$$

Die Reihe convergirt oder divergirt dann, wenn die erste der Grössen A_1, A_2, A_3, A_4 etc., welche nicht Null ist, positiv oder negativ ist.

261) Die unendliche, nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots$$

divergirt, wenn der Ausdruck

$$\lim n u_n$$

nicht Null ist, und convergirt, wenn

$$\lim n^h u_n$$

endlich bleibt, für Werthe von h grösser als + 1.

262) Wenn mit Bezug auf No. 261 $\lim n u_n = 0$ und $\lim n^h u_n = \infty$ ist, so convergirt die Reihe, wenn der Ausdruck

$$\lim n (l n)^h u_n$$

endlich ist, und divergirt, wenn

$$\lim n\, l n\, u_n$$

nicht Null ist. — Und allgemein

Wenn die Ausdrücke

$$\begin{array}{l} \lim n^h u_n \\ \lim n (l n)^h u_n \\ \lim n\, l n (l_2 n)^h u_n \\ \vdots \\ \lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \ldots\ldots (l_{r-1} n)^h u_n \text{ *)} \end{array}$$

sämmtlich unendlich gross, dagegen die Ausdrücke

$$\begin{array}{l} \lim n u_n \\ \lim n\, l n\, u_n \\ \lim n\, l n\, l_2 n\, u_n \\ \vdots \\ \lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \ldots\ldots l_{r-1} n\, u_n \end{array}$$

sämmtlich der Nulle gleich sind; so convergirt die Reihe, wenn

$$\lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \ldots\ldots (l_r n)^h u_n$$

nicht unendlich gross, und divergirt, wenn

$$\lim n\, l n\, l_2 n\, l_3 n \ldots\ldots (l_r n)\, u_n$$

nicht Null ist.

263) Wenn der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ für die unendliche nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots..$$

auf die Form $\frac{1}{1+\alpha}$ gebracht wird, so convergirt oder divergirt die Reihe, jenachdem $\lim \alpha$ für $n = \infty$ einen positiven oder negativen von Null verschiedenen Werth

*) $l_2 n = l(l n)$, $l_3 n = l(l(l n))$ etc.

besitzt. Ist dagegen $\lim \alpha = 0$, so convergirt oder divergirt die Reihe, jenachdem $\lim n\alpha$ grösser oder kleiner als die Einheit ist.

264) Wenn mit Bezug auf No. 263 $\lim n\alpha = 1$ und sich das Produkt $n\alpha$ der Grenze 1 durch Abnahme nähert, so stelle man den Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ unter der Form dar:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log(n+1)}{\log n}\cdot\frac{\log_2(n+1)}{\log_2 n}\cdots\cdots\frac{\log_{r-1}(n+1)}{\log_{r-1} n}(1+\alpha_r)}$$

(wobei r auch gleich die Einheit sein kann) *); die Reihe wird dann convergiren oder divergiren, jenachdem der Ausdruck

$$\lim \frac{\log_r n}{\log_r(n+1)-\log_r n}\cdot\alpha_n$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

265) Unter der in der vorigen Nummer gemachten Voraussetzung bringe man ferner den Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ auf die Form

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n\,l n}+\cdots\cdots+\frac{1}{n\,l n\,.\,l_2 n\cdots\cdots l_{r-1} n}+\alpha_n}$$

Die zu untersuchende Reihe convergirt oder divergirt dann, jenachdem der Ausdruck

$$\lim n\,l n\,l_2 n\cdots\cdots l_r n\,.\,\alpha_r$$

mehr oder weniger als die Einheit beträgt.

---

*) Für $r = 1$, ist $\frac{\log_{r-1}(n+1)}{\log_{r-1} n} = \frac{\log_0(n+1)}{\log_0 n} = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}$; der Ausdruck reduzirt sich daher auf $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\alpha_1\right)}$

VI. Ueber Doppelreihen.

Man entscheide über die Convergenz oder Divergenz folgender Doppelreihen:

1)
$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{2} &+& \frac{1}{4} &+& \frac{1}{8} &+& \frac{1}{16} &+& \frac{1}{32} &+ \cdots \\
\frac{2}{6} &+& \frac{2}{18} &+& \frac{2}{54} &+& \frac{2}{162} &+& \frac{2}{486} &+ \cdots \\
\frac{3}{16} &+& \frac{3}{64} &+& \frac{3}{256} &+& \frac{3}{1024} &+& \frac{8}{4096} &+ \cdots \\
\frac{4}{40} &+& \frac{4}{200} &+& \frac{4}{1000} &+& \frac{4}{5000} &+& \frac{4}{25000} &+ \cdots \\
\frac{5}{96} &+& \frac{5}{576} &+& \frac{5}{3456} &+& \frac{5}{20736} &+& \frac{5}{124416} &+ \cdots \\
\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots &
\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{2} &+& \frac{1}{4} &+& \frac{1}{8} &+& \frac{1}{16} &+& \frac{1}{32} &+ \cdots \\
\frac{1}{3} &+& \frac{1}{9} &+& \frac{1}{27} &+& \frac{1}{81} &+& \frac{1}{243} &+ \cdots \\
\frac{1}{4} &+& \frac{1}{16} &+& \frac{1}{64} &+& \frac{1}{256} &+& \frac{1}{1024} &+ \cdots \\
\frac{1}{5} &+& \frac{1}{25} &+& \frac{1}{125} &+& \frac{1}{625} &+& \frac{1}{3125} &+ \cdots \\
\frac{1}{6} &+& \frac{1}{36} &+& \frac{1}{216} &+& \frac{1}{1296} &+& \frac{1}{7776} &+ \cdots \\
\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots &
\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{cccccccccc}
\frac{1}{2} &+& \frac{1}{4} &+& \frac{1}{8} &+& \frac{1}{16} &+& \frac{1}{32} &+ \cdots \\
\frac{2}{3} &+& \frac{4}{9} &+& \frac{8}{27} &+& \frac{16}{81} &+& \frac{32}{243} &+ \cdots \\
\frac{3}{4} &+& \frac{9}{16} &+& \frac{27}{64} &+& \frac{81}{256} &+& \frac{243}{1024} &+ \cdots \\
\frac{4}{5} &+& \frac{16}{25} &+& \frac{64}{125} &+& \frac{256}{625} &+& \frac{1024}{3125} &+ \cdots \\
\frac{5}{6} &+& \frac{25}{36} &+& \frac{125}{216} &+& \frac{625}{1296} &+& \frac{3125}{7776} &+ \cdots \\
\vdots && \vdots && \vdots && \vdots && \vdots &
\end{array}$$

$$4)\quad \begin{array}{l}
\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\cdots\\
\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+\frac{1}{9.11}+\cdots\\
\frac{1}{1.5}+\frac{1}{5.9}+\frac{1}{9.13}+\frac{1}{13.17}+\frac{1}{17.21}+\cdots\\
\frac{1}{1.9}+\frac{1}{9.17}+\frac{1}{17.25}+\frac{1}{25.33}+\frac{1}{33.41}+\cdots\\
\frac{1}{1.17}+\frac{1}{17.33}+\frac{1}{33.49}+\frac{1}{49.65}+\frac{1}{65.81}+\cdots\\
\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots
\end{array}$$

$$5)\quad \begin{array}{l}
\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{8}{27}+\frac{16}{81}+\frac{32}{243}+\cdots\\
\frac{2}{2.3}+\frac{4}{3.9}+\frac{8}{4.27}+\frac{16}{5.81}+\frac{32}{6.243}+\cdots\\
\frac{2}{4.3}+\frac{4}{6.9}+\frac{8}{8.27}+\frac{16}{10.81}+\frac{32}{12.243}+\cdots\\
\frac{2}{6.3}+\frac{4}{9.9}+\frac{8}{12.27}+\frac{16}{15.81}+\frac{32}{18.243}+\cdots\\
\frac{2}{8.3}+\frac{4}{12.9}+\frac{8}{16.27}+\frac{16}{20.81}+\frac{32}{24.243}+\cdots\\
\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots
\end{array}$$

$$6)\quad \begin{array}{l}
1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\cdots\\
\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\cdots\\
\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\cdots\\
\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\cdots\\
\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}+\frac{1}{8!}+\frac{1}{9!}+\cdots\\
\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots\qquad\vdots
\end{array}$$

$$7)\quad \begin{array}{l}
+1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\cdots\\
-1+\frac{1}{3!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}-\frac{1}{9!}+\cdots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
+\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{8!}+\frac{1}{10!}-\cdots \\
-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}-\frac{1}{7!}+\frac{1}{9!}-\frac{1}{11!}+\cdots \\
+\frac{1}{4!}-\frac{1}{6!}+\frac{1}{8!}-\frac{1}{10!}+\frac{1}{12!}-\cdots \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

8)
$$
\begin{array}{l}
1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots \\
-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\cdots \\
+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\cdots \\
-\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{12}-\frac{1}{15}+\cdots \\
+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{9}-\frac{1}{12}+\frac{1}{15}-\cdots \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

9)
$$
\begin{array}{l}
1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots \\
-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\cdots \\
+\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{15}-\frac{1}{21}+\frac{1}{27}-\cdots \\
-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}+\frac{1}{28}-\frac{1}{36}+\cdots \\
+\frac{1}{5}-\frac{1}{15}+\frac{1}{25}-\frac{1}{35}+\frac{1}{45}-\cdots \\
\quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

10)
$$
\begin{array}{l}
1-\left(\frac{1}{2}\right)_1+\left(\frac{1}{2}\right)_2-\left(\frac{1}{2}\right)_3+\left(\frac{1}{2}\right)_4-\cdots \\
1-\left(\frac{1}{3}\right)_1+\left(\frac{1}{3}\right)_2-\left(\frac{1}{3}\right)_3+\left(\frac{1}{3}\right)_4-\cdots \\
1-\left(\frac{1}{4}\right)_1+\left(\frac{1}{4}\right)_2-\left(\frac{1}{4}\right)_3+\left(\frac{1}{4}\right)_4-\cdots
\end{array}
$$

$$1 - \left(\frac{1}{5}\right)_1 + \left(\frac{1}{5}\right)_2 - \left(\frac{1}{5}\right)_3 + \left(\frac{1}{5}\right)_4 - \cdots$$

$$1 - \left(\frac{1}{6}\right)_1 + \left(\frac{1}{6}\right)_2 - \left(\frac{1}{6}\right)_3 + \left(\frac{1}{6}\right)_4 - \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

11) $$l\,2 + l\left(\frac{2}{3}\right) + l\left(\frac{3}{2}\right) + l\left(\frac{3}{4}\right) + l\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots$$

$$l(\sqrt{2}) + l\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) + l\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right) + l\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right) + l\left(\sqrt{\frac{4}{3}}\right) + \cdots$$

$$l(\sqrt[4]{2}) + l\left(\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\right) + l\left(\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right) + l\left(\sqrt[4]{\frac{3}{4}}\right) + l\left(\sqrt[4]{\frac{4}{3}}\right) + \cdots$$

$$l(\sqrt[8]{2}) + l\left(\sqrt[8]{\frac{2}{3}}\right) + l\left(\sqrt[8]{\frac{3}{2}}\right) + l\left(\sqrt[8]{\frac{3}{4}}\right) + l\left(\sqrt[8]{\frac{4}{3}}\right) + \cdots$$

$$l(\sqrt[16]{2}) + l\left(\sqrt[16]{\frac{2}{3}}\right) + l\left(\sqrt[16]{\frac{3}{2}}\right) + l\left(\sqrt[16]{\frac{3}{4}}\right) + l\left(\sqrt[16]{\frac{4}{3}}\right) + \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

12) $$ab + (a+d)bq + (a+2d)bq^2 + (a+3d)bq^3 + $$
$$+ (a+4d)bq^4 + \cdots$$

$$ab^2 + (a+d)b^2q^2 + (a+2d)b^2q^4 + (a+3d)b^2q^6 + $$
$$+ (a+4d)b^2q^8 + \cdots$$

$$ab^3 + (a+d)b^3q^3 + (a+2d)b^3q^6 + (a+3d)b^3q^9 + $$
$$+ (a+4d)b^3q^{12} + \cdots$$

$$ab^4 + (a+d)b^4q^4 + (a+2d)b^4q^8 + (a+3d)b^4q^{12} + $$
$$+ (a+4d)b^4q^{16} + \cdots$$

$$ab^5 + (a+d)b^5q^5 + (a+2d)b^5q^{10} + (a+3d)b^5q^{15} + $$
$$+ (a+4d)b^5q^{20} + \cdots$$

$$\vdots$$

13) $$\frac{1}{a^2(a^2+4)} + \frac{3}{(a^2+4)(a^2+4.2^2)} +$$

$$+ \frac{5}{(a^2+4.2^2)(a^2+4.3^2)} + \frac{7}{(a^2+4.3^2)(a^2+4.4^2)} + \cdots$$

$$\frac{1}{4a^2(4a^2+4)} + \frac{3}{(4a^2+4)(4a^2+4.2^2)} +$$

$$+ \frac{5}{(4a^2+4.2^2)(4a^2+4.3^2)} + \frac{7}{(4a^2+4.3^2)(4a^2+4.4^2)} + \cdots$$

$$\frac{1}{9a^2(9a^2+4)} + \frac{3}{(9a^2+4)(9a^2+4.2^2)} +$$

$$+ \frac{5}{(9a^2+4.2^2)(9a^2+4.3^2)} + \frac{7}{(9a^2+4.3^2)(9a^2+4.4^2)} + \cdots$$

$$\frac{1}{16a^2(16a^2+4)} + \frac{3}{(16a^2+4)(16a^2+4.2^2)} +$$

$$+ \frac{5}{(16a^2+4.2^2)(16a^2+4.3^2)} + \frac{7}{(16a^2+4.3^2)(16a^2+4.4^2)} + \cdots$$

$$\frac{1}{25a^2(25a^2+4)} + \frac{3}{(25a^2+4)(25a^2+4.2^2)} +$$

$$+ \frac{5}{(25a^2+4.2^2)(25a^2+4.3^2)} + \frac{7}{(25a^2+4.3^2)(25a^2+4.4^2)} + \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

14) $$1 - \frac{1.6}{2.5} + \frac{1.6}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6} - \frac{1.6}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} +$$

$$+ \frac{1.6}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7}\cdot\frac{4.9}{5.8} - \cdots$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.5} - \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6} + \frac{1.3}{3.5}\cdot\frac{2.7}{8.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} -$$

$$- \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{2.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7}\cdot\frac{4.9}{5.8} + \cdots$$

$$+\frac{1}{4} - \frac{1.3}{4.5} + \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{1.7}{3.6} - \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} +$$

$$+ \frac{1.3}{2.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7}\cdot\frac{4.9}{5.8} - \cdots$$

$$-\frac{1}{8} + \frac{1.3}{8.5} - \frac{1.3}{4.5}\cdot\frac{1.7}{3.6} + \frac{1.3}{4.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7} -$$

$$- \frac{1.3}{4.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7}\cdot\frac{4.9}{5.8} + \cdots$$

$$+\frac{1}{16}-\frac{1.3}{16.5}+\frac{1.3}{8.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}-\frac{1.3}{8.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7}+$$
$$+\frac{1.3}{8.5}\cdot\frac{1.7}{3.6}\cdot\frac{3.8}{4.7}\cdot\frac{4.9}{5.8}-\cdots$$
$$\vdots$$

15) $$+1-\frac{2.5}{3.4}+\frac{2.5}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}-\frac{2.5}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}+$$
$$+\frac{2.5}{3.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}-\cdots$$

$$-\frac{1}{2}+\frac{2.5}{9.4}-\frac{2.5}{12.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}+\frac{2.5}{15.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}-$$
$$-\frac{2.5}{18.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}+\cdots$$

$$+\frac{1}{4}-\frac{2.5}{27.4}+\frac{2.5}{48.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}-\frac{2.5}{75.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}+$$
$$+\frac{2.5}{108.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}-\cdots$$

$$-\frac{1}{8}+\frac{2.5}{81.4}-\frac{2.5}{192.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}+\frac{2.5}{375.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}-$$
$$-\frac{2.5}{648.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}+\cdots$$

$$+\frac{1}{16}-\frac{2.5}{243.4}+\frac{2.5}{768.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}-\frac{2.5}{1875.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}+$$
$$+\frac{2.5}{3888.4}\cdot\frac{3.6}{4.5}\cdot\frac{4.7}{5.6}\cdot\frac{5.8}{6.7}-\cdots$$
$$\vdots$$

16) $$+1-\frac{a+2}{a+4}+\frac{a+4}{a+6}-\frac{a+6}{a+8}+\frac{a+8}{a+10}-\cdots$$
$$-b+\frac{b^2(a+2)}{a+4}-\frac{b^3(a+4)}{a+6}+\frac{b^4(a+6)}{a+8}-\frac{b^5(a+8)}{a+10}+\cdots$$

$$+ b^2 - \frac{b^3(a+2)}{a+4} + \frac{b^4(a+4)}{a+6} - \frac{b^5(a+6)}{a+8} + \frac{b^6(a+8)}{a+10} - \dots$$

$$- b^3 + \frac{b^4(a+2)}{a+4} - \frac{b^5(a+4)}{a+6} + \frac{b^6(a+6)}{a+8} - \frac{b^7(a+8)}{a+10} + \dots$$

$$+ b^4 - \frac{b^5(a+2)}{a+4} + \frac{b^6(a+4)}{a+6} - \frac{b^7(a+6)}{a+8} + \frac{b^8(a+8)}{a+10} - \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

17) $$a^2 + a^3 + a^4 + a^5 + a^6 + \dots$$

$$- a^{\frac{3}{2}} - a^{\frac{6}{2}} - a^{\frac{9}{2}} - a^{\frac{12}{2}} - a^{\frac{15}{2}} - \dots$$

$$+ a^{\frac{4}{3}} + a^{\frac{8}{3}} + a^{\frac{12}{3}} + a^{\frac{16}{3}} + a^{\frac{20}{3}} + \dots$$

$$- a^{\frac{5}{4}} - a^{\frac{10}{4}} - a^{\frac{15}{4}} - a^{\frac{20}{4}} - a^{\frac{25}{4}} - \dots$$

$$+ a^{\frac{6}{5}} + a^{\frac{12}{5}} + a^{\frac{18}{5}} + a^{\frac{24}{5}} + a^{\frac{30}{5}} + \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

18) $$l\left(\frac{4}{1}\right) - l\left(\frac{6}{2}\right) + l\left(\frac{8}{3}\right) - l\left(\frac{10}{4}\right) + l\left(\frac{12}{5}\right) - \dots$$

$$l\left(\sqrt{\frac{4}{1}}\right) - l\left(\sqrt{\frac{6}{2}}\right) + l\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) - l\left(\sqrt{\frac{10}{4}}\right) + l\left(\sqrt{\frac{12}{5}}\right) - \dots$$

$$l\left(\sqrt[4]{\frac{4}{1}}\right) - l\left(\sqrt[4]{\frac{6}{2}}\right) + l\left(\sqrt[4]{\frac{8}{3}}\right) - l\left(\sqrt[4]{\frac{10}{4}}\right) + l\left(\sqrt[4]{\frac{12}{5}}\right) - \dots$$

$$l\left(\sqrt[8]{\frac{4}{1}}\right) - l\left(\sqrt[8]{\frac{6}{2}}\right) + l\left(\sqrt[8]{\frac{8}{3}}\right) - l\left(\sqrt[8]{\frac{10}{4}}\right) + l\left(\sqrt[8]{\frac{12}{5}}\right) - \dots$$

$$l\left(\sqrt[16]{\frac{4}{1}}\right) - l\left(\sqrt[16]{\frac{6}{2}}\right) + l\left(\sqrt[16]{\frac{8}{3}}\right) - l\left(\sqrt[16]{\frac{10}{4}}\right) + l\left(\sqrt[16]{\frac{12}{5}}\right) - \dots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

19) $$\sin 2 + \sin^2 2 + \sin^3 2 + \sin^4 2 + \\ + \sin^5 2 + \ldots$$

$$-\sin\frac{3}{2} - \left(\frac{\sin\frac{3}{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sin\frac{3}{2}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\sin\frac{3}{2}}{2}\right)^4 - \\ - \left(\frac{\sin\frac{3}{2}}{2}\right)^5 - \ldots$$

$$+\sin\frac{4}{3} + \left(\frac{\sin\frac{4}{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{4}{3}}{4}\right)^3 + \left(\frac{\sin\frac{4}{3}}{4}\right)^4 + \\ + \left(\frac{\sin\frac{4}{3}}{4}\right)^5 + \ldots$$

$$-\sin\frac{5}{4} - \left(\frac{\sin\frac{5}{4}}{8}\right)^2 - \left(\frac{\sin\frac{5}{4}}{8}\right)^3 - \left(\frac{\sin\frac{5}{4}}{8}\right)^4 - \\ - \left(\frac{\sin\frac{5}{4}}{8}\right)^5 - \ldots$$

$$+\sin\frac{6}{5} + \left(\frac{\sin\frac{6}{5}}{16}\right)^2 + \left(\frac{\sin\frac{6}{5}}{16}\right)^3 + \left(\frac{\sin\frac{6}{5}}{16}\right)^4 + \\ + \left(\frac{\sin\frac{6}{5}}{16}\right)^5 + \ldots$$

$$\vdots$$

20) $$\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{b+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a+1}{b+1} - \frac{1}{3}\cdot\frac{a+2}{b+2} + \\ + \frac{1}{3}\cdot\frac{a+2}{b+2} - \ldots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^2 + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^2 - \ldots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^3 + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^3 - \cdots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^4 - \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^4 + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^4 - \cdots$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 - \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^5 + \frac{1}{2}\left(\frac{a+1}{b+1}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^5 + \\ + \frac{1}{3}\left(\frac{a+2}{b+2}\right)^5 - \cdots$$

$$\vdots$$

21) $$\begin{array}{l} \operatorname{arctang}\frac{1}{3} + \operatorname{arctang}\frac{1}{7} + \operatorname{arctang}\frac{1}{13} + \operatorname{arctang}\frac{1}{21} + \cdots \\ \operatorname{arctang}\frac{1}{7} + \operatorname{arctang}\frac{1}{13} + \operatorname{arctang}\frac{1}{21} + \operatorname{arctang}\frac{1}{31} + \cdots \\ \operatorname{arctang}\frac{1}{13} + \operatorname{arctang}\frac{1}{21} + \operatorname{arctang}\frac{1}{31} + \operatorname{arctang}\frac{1}{43} + \cdots \\ \operatorname{arctang}\frac{1}{21} + \operatorname{arctang}\frac{1}{31} + \operatorname{arctang}\frac{1}{43} + \operatorname{arctang}\frac{1}{57} + \cdots \\ \operatorname{arctang}\frac{1}{31} + \operatorname{arctang}\frac{1}{43} + \operatorname{arctang}\frac{1}{57} + \operatorname{arctang}\frac{1}{73} + \cdots \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \end{array}$$

22) $$\begin{array}{l} \cos 1 - \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos\frac{1}{5} - \cdots \\ \cos^2 1 - \frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^2\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^2\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^2\frac{1}{5} - \cdots \\ \cos^3 1 - \frac{1}{3}\cos^3\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^3\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^3\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^3\frac{1}{5} - \cdots \\ \cos^4 1 - \frac{1}{3}\cos^4\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^4\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^4\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^4\frac{1}{5} - \cdots \\ \cos^5 1 - \frac{1}{3}\cos^5\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cos^5\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\cos^5\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\cos^5\frac{1}{5} - \cdots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \end{array}$$

23)
$$\begin{array}{lllllll}
1 & +\; x & +\; x^2 & +\; x^3 & +\; x^4 & + \ldots \\
x & +\; 2x^2 & +\; 4x^4 & +\; 8x^6 & +\; 16x^8 & + \ldots \\
x^2 & +\; 3x^3 & +\; 9x^6 & +\; 27x^9 & +\; 81x^{12} & + \ldots \\
x^3 & +\; 4x^4 & +\; 16x^8 & +\; 64x^{12} & +\; 256x^{16} & + \ldots \\
x^4 & +\; 5x^5 & +\; 25x^{10} & +\; 125x^{15} & +\; 625x^{20} & + \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

24)
$$\begin{array}{llllll}
1 & -\; x & +\; x^2 & -\; x^3 & +\; x^4 & - \ldots \\
1 & -\; (2)_1 x & +\; (3)_2 x^2 & -\; (4)_3 x^3 & +\; (5)_4 x^4 & - \ldots \\
1 & -\; (3)_1 x & +\; (4)_2 x^2 & -\; (5)_3 x^3 & +\; (6)_4 x^4 & - \ldots \\
1 & -\; (4)_1 x & +\; (5)_2 x^2 & -\; (6)_3 x^3 & +\; (7)_4 x^4 & - \ldots \\
1 & -\; (5)_1 x & +\; (6)_2 x^2 & -\; (7)_3 x^3 & +\; (8)_4 x^4 & - \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

25)
$$\begin{array}{llllll}
1 & -\; x & +\; x^2 & -\; x^3 & +\; x^4 & - \ldots \\
\frac{x}{2} & -\; \frac{x^2}{2} & +\; \frac{x^3}{2} & -\; \frac{x^4}{2} & +\; \frac{x^5}{2} & - \ldots \\
\frac{x^2}{3} & -\; \frac{x^3}{3} & +\; \frac{x^4}{3} & -\; \frac{x^5}{3} & +\; \frac{x^6}{3} & - \ldots \\
\frac{x^3}{4} & -\; \frac{x^4}{4} & +\; \frac{x^5}{4} & -\; \frac{x^6}{4} & +\; \frac{x^7}{4} & - \ldots \\
\frac{x^4}{5} & -\; \frac{x^5}{5} & +\; \frac{x^6}{5} & -\; \frac{x^7}{5} & +\; \frac{x^8}{5} & - \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

26)
$$\begin{array}{llllll}
a & +\; a\,x & +\; a\,x^2 & +\; a\,x^3 & +\; a\,x^4 & + \ldots \\
a^2 & +\; a^2 x & +\; a^2 x^2 & +\; a^2 x^3 & +\; a^2 x^4 & + \ldots \\
a^3 & +\; a^3 x & +\; a^3 x^2 & +\; a^3 x^3 & +\; a^3 x^4 & + \ldots \\
a^4 & +\; a^4 x & +\; a^4 x^2 & +\; a^4 x^3 & +\; a^4 x^4 & + \ldots \\
a^5 & +\; a^5 x & +\; a^5 x^2 & +\; a^5 x^3 & +\; a^5 x^4 & + \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

27) $1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$$x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$\frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

28) $\operatorname{arctang} \frac{x}{2 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{2.3 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{3.4 + x^2} +$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{x}{4.5 + x^2} + \cdots$$

$$\operatorname{arctang} \frac{x}{2.3 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{3.4 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{4.5 + x^2} +$$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{x}{5.6 + x^2} + \cdots$$

$$\operatorname{arctang} \frac{x}{3.4 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{4.5 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{5.6 + x^2} +$$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{x}{6.7 + x^2} + \cdots$$

$$\operatorname{arctang} \frac{x}{4.5 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{5.6 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{6.7 + x^2} +$$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{x}{7.8 + x^2} + \cdots$$

$$\operatorname{arctang} \frac{x}{5.6 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{6.7 + x^2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{7.8 + x^2} +$$

$$+ \operatorname{arctang} \frac{x}{8.9 + x^2} + \cdots$$

$$\vdots$$

29) Aus der convergenten Doppelreihe

$$\begin{array}{l}
1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\
- \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \cdots \\
+ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{20} - \frac{1}{24} + \cdots \\
- \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{1}{24} + \frac{1}{32} - \frac{1}{40} + \frac{1}{48} - \cdots \\
+ \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{48} - \frac{1}{64} + \frac{1}{80} - \frac{1}{96} + \cdots \\
- \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{96} + \frac{1}{128} - \frac{1}{160} + \frac{1}{192} - \cdots \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

lassen sich folgende Reihen durch eine andere Anordnung der Glieder ableiten:

a)
$$\begin{array}{l}
1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots \\
- \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} - \frac{1}{14} + \frac{1}{8} - \cdots \\
+ \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{20} + \frac{1}{28} - \frac{1}{16} + \cdots \\
- \frac{1}{8} - \frac{1}{24} + \frac{1}{16} - \frac{1}{40} - \frac{1}{56} + \frac{1}{32} - \cdots \\
+ \frac{1}{16} + \frac{1}{48} - \frac{1}{32} + \frac{1}{80} + \frac{1}{112} - \frac{1}{64} + \cdots \\
- \frac{1}{32} - \frac{1}{96} + \frac{1}{64} - \frac{1}{160} - \frac{1}{224} + \frac{1}{128} - \cdots \\
\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots
\end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l}
+ 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots \\
+ \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} + \frac{1}{20} - \frac{1}{24} + \cdots \\
- \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \cdots \\
+ \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{48} - \frac{1}{64} + \frac{1}{80} - \frac{1}{96} + \cdots
\end{array}$$

$$
\begin{array}{l}
+\frac{1}{64}-\frac{1}{128}+\frac{1}{192}-\frac{1}{256}+\frac{1}{320}-\frac{1}{384}+\cdots \\
-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{40}+\frac{1}{48}-\cdots \\
+\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

$$
c)\quad
\begin{array}{l}
+1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots \\
+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{16}+\frac{1}{20}-\frac{1}{24}+\cdots \\
-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{4}-\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{8}-\cdots \\
+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{48}-\frac{1}{64}+\frac{1}{80}-\frac{1}{96}+\cdots \\
+\frac{1}{64}+\frac{1}{192}-\frac{1}{128}+\frac{1}{320}+\frac{1}{448}-\frac{1}{256}+\cdots \\
-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{24}+\frac{1}{32}-\frac{1}{40}+\frac{1}{48}-\cdots \\
+\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots\ ;
\end{array}
$$

es ist anzugeben, ob die Reihen *a*) *b*) und *c*) ebenfalls convergiren oder nicht, und ob sie im Falle der Convergenz dieselbe Summe besitzen wie die ursprüngliche Reihe.

30) Aus der convergenten Doppelreihe

$$
\begin{array}{l}
1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{6}}+\cdots \\
-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{2\sqrt{4}}-\frac{1}{2\sqrt{5}}+\frac{1}{2\sqrt{6}}-\cdots \\
+\frac{1}{3}-\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}-\frac{1}{3\sqrt{4}}+\frac{1}{3\sqrt{5}}-\frac{1}{3\sqrt{6}}+\cdots \\
-\frac{1}{4}+\frac{1}{4\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{3}}+\frac{1}{4\sqrt{4}}-\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{4\sqrt{6}}-\cdots \\
+\frac{1}{5}-\frac{1}{5\sqrt{2}}+\frac{1}{5\sqrt{3}}-\frac{1}{5\sqrt{4}}+\frac{1}{5\sqrt{5}}-\frac{1}{5\sqrt{6}}+\cdots \\
-\frac{1}{6}+\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{1}{6\sqrt{3}}+\frac{1}{6\sqrt{4}}-\frac{1}{6\sqrt{5}}+\frac{1}{6\sqrt{6}}-\cdots \\
+\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

entstehen durch eine andere Anordnung der Glieder folgende Reihen:

$$a)\quad \begin{array}{l}
1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots \\
- \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{4}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} - \cdots \\
+ \frac{1}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{5}} + \frac{1}{3\sqrt{7}} - \frac{1}{3\sqrt{4}} + \cdots \\
- \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4\sqrt{6}} - \cdots \\
+ \frac{1}{5} + \frac{1}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} + \frac{1}{5\sqrt{7}} - \frac{1}{5\sqrt{4}} + \cdots \\
- \frac{1}{6} + \frac{1}{6\sqrt{2}} - \frac{1}{6\sqrt{3}} + \frac{1}{6\sqrt{4}} - \frac{1}{6\sqrt{5}} + \frac{1}{6\sqrt{6}} - \cdots \\
+ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}$$

$$b)\quad \begin{array}{l}
+ 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \cdots \\
+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{4}} + \frac{1}{3\sqrt{5}} - \frac{1}{3\sqrt{6}} + \cdots \\
- \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{4}} - \frac{1}{2\sqrt{5}} + \frac{1}{2\sqrt{6}} - \cdots \\
+ \frac{1}{5} - \frac{1}{5\sqrt{2}} + \frac{1}{5\sqrt{3}} - \frac{1}{5\sqrt{4}} + \frac{1}{5\sqrt{5}} - \frac{1}{5\sqrt{6}} + \cdots \\
+ \frac{1}{7} - \frac{1}{7\sqrt{2}} + \frac{1}{7\sqrt{3}} - \frac{1}{7\sqrt{4}} + \frac{1}{7\sqrt{5}} - \frac{1}{7\sqrt{6}} + \cdots \\
- \frac{1}{4} + \frac{1}{4\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{3}} + \frac{1}{4\sqrt{4}} - \frac{1}{4\sqrt{5}} + \frac{1}{4\sqrt{6}} - \cdots \\
+ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \; ;
\end{array}$$

sind die beiden letzten Reihen gleichfalls convergent, und besitzen sie dieselbe Summe wie die Stammreihe oder nicht?

VII. Ueber Reihenentwicklungen.

A. Ueber recurrente Reihen.

Folgende Funktionen sind in recurrirende Reihen zu verwandeln. Für jede dieser Reihen ist das allgemeine Glied in independenter Form darzustellen, die Summenformel zu bestimmen, und ferner sind die Grenzen für die Giltigkeit der Entwicklung anzugeben.

1) $\dfrac{1+x}{1-x-x^2}$

2) $\dfrac{1-x}{1-x-x^2}$

3) $\dfrac{1+2x}{1-x-x^2}$

4) $\dfrac{1-x}{1-x-2x^2}$

5) $\dfrac{2x+2}{x^2+4x-1}$

6) $\dfrac{1-x}{1-5x+6x^2}$

7) $\dfrac{1}{(1+x)(1-x)^2}$

8) $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$

9) $\dfrac{x \sin \varphi}{1-2p \cos \varphi \,.\, x + p^2 x^2}$

10) $\dfrac{x \cos \varphi}{1-2p \cos \varphi \,.\, x + p^2 x^2}$,

11) $\dfrac{A + Bpx}{1-2p \cos \varphi \,.\, x + p^2 x^2}$

12) $\dfrac{1+x+x^2}{(1-x)^2 (1-x)(1+x^2)}$

13) $\dfrac{1-5x+8x^2}{\sqrt{x}-8x\sqrt{x}+21x^2\sqrt{x}-18x^3\sqrt{x}}$

14) $\dfrac{-1+3x}{1+3\sqrt{x}-4x}$

15) $\dfrac{1-\sqrt[3]{x}}{-6-\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$

Folgende recurrirende Reihen der zweiten Ordnung sind fortzusetzen, ohne vorher die Beziehungsskala zu entwickeln:

16) $1 + 3x + 4x^2 + 7x^3 + \ldots\ldots$

17) $1 + 2x^2 + 2x^3 + \ldots\ldots$

18) $1 + 4x + 14x^2 + 46x^3 + \ldots\ldots$

19) $3 - 17x + 87x^2 - 437x^3 + \ldots\ldots$

20) $1 - 2x - \frac{1}{6}x^2 - \frac{13}{36}x^3 - \ldots\ldots$

21) $2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + 0 . x^3 + \ldots\ldots$

In folgenden recurrirenden Reihen, welche von der dritten Ordnung sind, sollen 3 weitere Glieder ohne Zuhilfenahme der Beziehungsskala entwickelt werden:

22) $x^2 + 6x^3 + 36x^4 + 208x^5 + \ldots\ldots$

23) $1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 5x^5 + \ldots\ldots$

24) $1 + x + x^2 + 4x^3 + 31x^4 + 256x^5 + \ldots\ldots$

25) $1 + 2x + 3x^2 + 8x^3 + 13x^4 + 38x^5 + \ldots\ldots$

26) $1 + 3x + 8x^2 + 21x^3 + 55x^4 + 144x^5 + \ldots\ldots$

27) $1 + 3x^2 - x^3 + 9x^4 - 6x^5 + \ldots\ldots$

28) $1 + 3x + 9x^2 + 23x^3 + 57x^4 + 135x^5 + \ldots\ldots$

29) $1 - x + 9x^2 - 5x^3 + 65x^4 + 3x^5 + \ldots\ldots$

30) $1 + 2x + 2x^2 + x^3 + 0x^4 + 0x^5 + \ldots\ldots$

31) Die Reihe

$$1 - x + x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{37}{6}x^4 - \frac{37}{3}x^5 + \frac{160}{3}x^6 - \frac{397}{3}x^7 - \ldots$$

ist eine recurrirende der 4. Ordnung; man bestimme die 3 nächstfolgenden Glieder derselben.

32) Die wiederkehrende Reihe
$1 + 2x^2 - x^3 + 10x^4 - 2x^5 + 31x^6 - 10x^7 + 92x^8 - 31x^9 + \ldots$
welche eine fünfgliederige Beziehungsskala besitzt, soll fortgesetzt werden.

33) Das dritte Glied einer recurrenten Reihe, deren Beziehungsskala der Coefficienten $-6, -5$ ist, ist $17x^2$; man berechne das nächstfolgende Glied.

34) Es sei $2, -1$ die Relationsskala für die Coefficienten einer recurrenten Reihe und $5x^4$ das 5. Glied derselben, wie lautet das 4. Glied der Reihe?

35) Das 5. Glied der wiederkehrenden Reihe von der Beziehungsskala der Coefficienten $1, -1$, ist $11x^4$; man berechne den Coefficienten des nächstfolgenden Gliedes und jenen von x^8.

36) Man finde für jede der Reihen No. 16 bis 30 die erzeugende Funktion.

37) Von einer recurrenten Reihe, deren Coefficienten die Relationsskala $-2, -1$ besitzen, sind die Glieder
$$9, \; -7x \text{ und } -34x^{14}, \; +33x^{15}$$
gegeben; man bestimme die Summe der ersten 16 Glieder und die gebrochene Funktion, aus deren Entwicklung die Reihe entsteht.

38) Von einer recurrenten Reihe, deren Coefficienten die Relationsskala $3, -3, 1$ besitzen, sind die Glieder
$$3, \; 6x, \; 11x^2 \text{ und } 531x^{22}, \; 578x^{23}, \; 627x^{24}$$
gegeben; man finde die Summe der unendlichen Reihe und die Summe der ersten n Glieder.

39) In einer recurrenten Reihe besitzen die Coefficienten die Relationsskala $1, -1$ und das dritte Glied ist $4x^2$; man finde hieraus die Summe der unendlichen Reihe.

Es ist zu untersuchen, ob folgende Reihen recurrente seien, und im bejahenden Falle die Summe einer jeden zu bestimmen:

40) $1 - 3x + 9x^2 - 27x^3 + 81x^4 - 243x^5 + \ldots$

41) $1 + 4x + 7x^2 + 10x^3 + 13x^4 + \ldots$

42) $1 + 7x + 18x^2 + 34x^3 + 55x^4 + 81x^5 + 112x^6 + \ldots\ldots$

43) $11 + 25x + 57x^2 + 113x^3 + 199x^4 + 321x^5 + 485x^6 +$
$+ 697x^7 + \ldots\ldots$

44) $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + x^4 - 4x^5 + 16x^6 - 64x^7 +$
$+ 256x^8 - 1024x^9 + 4096x^{10} - \ldots\ldots$

45) $1 + 3x + 6x^2 + 12x^3 + 14x^4 + 84x^5 + 96x^6 + \ldots\ldots$

46) $x(1-x) + x^2(1-x^2) + x^3(1-x^3) + x^4(1-x^4) + \ldots.$

47) $x(1-x) + 2x^2(1-x^2) + 3x^3(1-x^3) + 4x^4(1-x^4) + \ldots\ldots$

48) $ax(1-x) - (a+d)x^2(1-x^2) + (a+2d)x^3(1-x^3) -$
$-(a+3d)x^4(1-x^4) + \ldots\ldots$

49) Es sei $u_{n+2} = au_{n+1} - bu_n$ die charakteristische Gleichung für eine recurrente Reihe; dann ist immer

$$\frac{u^2_{n+1} - au_n u_{n+1} + bu^2_n}{b^n}$$

eine konstante Grösse.

50) Es seien u_n, u_{n+1}, u_{n+2} drei auf einander folgende Glieder einer recurrenten Reihe, dann ist die Reihe

$$U_n = u_n u_{n+2} - u^2_{n+1}$$

ebenfalls eine recurrente.

51) Es seien u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, u_{n+3} Glieder einer recurrenten Reihe, dann ist die Reihe, deren allgemeines Glied

$$U_n = u_n u_{n+3} - u_{n+1} u_{n+2}$$

ist, gleichfalls eine recurrente.

B. Ueber die Binomial- und Exponential-Reihe.*)

52) Es ist der Ausdruck $(a + x)^m$ in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den steigenden Potenzen des Quotienten $\frac{x}{a+x}$ fortschreitet.

---

*) Sämmtliche entwickelte Reihen sind bezüglich ihrer Convergenz zu untersuchen.

53) Die Funktion $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ ist in eine Reihe zu entwickeln, welche nach den steigenden Potenzen des Bruches $\frac{x}{1+x}$ fortschreitet.

54) Der Ausdruck $\left(\frac{1+x}{2x}\right)^{-n}$ ist in eine Reihe zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen des Quotienten $\frac{1-x}{1+x}$ fortschreitet.

55) Es ist der Ausdruck $\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)^{n}$ in eine Reihe zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen der Grösse $\frac{1}{2x+1}$ fortschreitet.

56) Man beweise:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \dots$$

$$= \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \dots\right)$$

$$\sqrt[3]{3} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{24} + \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48} - \frac{1}{24}\cdot\frac{4}{48}\cdot\frac{7}{72} + \dots\right)$$

$$= \frac{13}{9}\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \dots\right)$$

$$\sqrt[3]{5} = \frac{5}{3}\left(1 + \frac{1}{81}\cdot 2 + \frac{1.4}{81.162}\cdot 4 + \frac{1.4.7}{81.162.243}\cdot 8 + \dots\right)$$

$$\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \frac{11}{3}\left(1 + \frac{5}{252} + \frac{5.15}{252.504} + \right.$$

$$\left. + \frac{5.15.25}{252.504.756} + \dots\right)$$

$$\sqrt{8+\sqrt{15}} + \sqrt{8-\sqrt{15}} = 2\sqrt{7}\left\{1 + \frac{1}{2!}\frac{15}{195} - \frac{15}{4!}\left(\frac{15}{196}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1.15.63}{6!}\left(\frac{15}{196}\right)^3 - \frac{1.15.63.99}{8!}\left(\frac{15}{196}\right)^4 + \dots\right\}$$

$$= \frac{11}{2}\left\{1 - \frac{1}{22} - \frac{1.3}{22.44} - \frac{1.3.5}{22.44.66} - \dots\right\}$$

Wie viele Glieder hat man von jeder der vorstehenden Reihen beizubehalten, wenn das Resultat bis auf 10 Dezimalstellen genau gefunden werden soll?

57) Es ist der Ausdruck $\left(\sqrt{1+x^2}+1\right)^m$ in eine Potenzenreihe zu entwickeln.

58) Man verwandle die Funktion

$$f(x) = \left[\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^m} - \frac{\sqrt{1-x^2}+1}{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^m}\right]\frac{x^{2m}}{2}$$

in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe.

59) Folgende Ausdrücke sind in Potenzenreihen zu entwickeln:

$$a)\ \frac{1-2x\cos\varphi + x^2\cos 2\varphi}{(1-2x\cos\varphi + x^2)^2}$$

$$b)\ \frac{2.(1-x\cos\varphi)\sin\varphi}{(1-2x\cos\varphi + x^2)^2}$$

60) Die Reihe

$$[(1+x)^n - 1] + [(1+x^2)^n - 1] + [(1+x^3)^n - 1] + \\ + [(1+x^4)^n - 1] + \ldots .$$

ist in eine Potenzenreihe umzuwandeln und zu zeigen, dass der Coefficient von x^m der Summe jener Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz gleich ist, deren Zeiger Theiler von m sind, wobei die Einheit mitzuzählen ist.

61) Man transformire auch obige Reihe in eine Reihe von der Form

$$A_1\frac{x}{1-x} + A_2\frac{x^2}{1-x^2} + A_3\frac{x^3}{1-x^3} + A_4\frac{x^4}{1-x^4} + \ldots .$$

62) Für folgende Funktionen sind Reihen abzuleiten, welche nach den steigenden Potenzen der Variablen geordnet sind:

$$a)\ \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} + e^{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}}{2}$$

$$b)\ \frac{e^{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} - e^{-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}}{2\sqrt{1+x^2}}$$

c) $\dfrac{e^{\frac{1}{1+x}} - e^{\frac{1}{1-x}}}{2}$

d) $\dfrac{e^y - e^z}{2\sqrt{1+x^2}}$, $y = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}+x}$, $z = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}-x}$

63) Es sei

$$a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots$$

eine unbedingt convergirende Reihe; man entwickle

$$e^{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots}$$

in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe und bestimme den Coefficienten von x^n sowohl in independenter als auch in recurrirender Form.

64) Als spezielle Fälle der vorhergehenden Aufgabe verwandle man folgende Funktionen in Reihen:

a) $e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots}$

b) $e^{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots}$

c) $e^{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots}$

d) $e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots}$

e) $e^{x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots}$

f) $e^{x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots}$

g) $e^{(1+x)^n}$

h) e^{e^x}

Aus der independenten Form des Coefficienten der n^{ten} Potenz von x in dem Beispiele *a)* leite man folgenden Satz der höheren Zahlentheorie ab:

„Das Produkt aller ganzen Zahlen, die kleiner als eine Primzahl sind, um eine Einheit vermehrt, ist theilbar durch diese Primzahl.“ (Wilson'scher Satz.)

Welche bemerkenswerthe combinatorische Formeln findet man ferner, wenn man in *a)* die Glieder der Reihe abwechselnd mit dem Zeichen + oder —, oder durchgehends negativ nennt?

C. Ueber logarithmische Reihen.

65) Aus der Formel

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots\ldots \quad (-1 < x < +1)$$

ist für $l\,y$ die Reihe

$$\frac{l(y-1) + l(y+1)}{2} + \left[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3(2y^2-1)^3} + \frac{1}{5(2y^2-1)^5} + \ldots\right]$$

abzuleiten. Welchen Zahlwerth muss y wenigstens besitzen, wenn für eine Genauigkeit bis auf 10 Dezimalstellen von der eingeklammerten Reihe drei, beziehungsweise zwei Glieder oder blos ein einziges Glied hinreichen soll?

66) Aus derselben Formel leite man

a) die von Borda aufgestellte Reihe:

$$l(y+2) = 2\,l(y+1) + l(y-2) - 2\,l(y-1) +$$
$$+ 2\left[\frac{2}{y^3-3y} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{y^3-3y}\right)^3 + \ldots\right]$$

b) die von Haros gegebene Reihe

$$l(y+5) = l(y+4) + l(y+3) + l(y-4) + l(y-3) -$$
$$- l(y-5) - 2\,l\,y - 2\left[\frac{72}{y^4-25y^2+72} + \frac{1}{3}\left(\frac{72}{y^4-25y^2+72}\right)^3 + \ldots\right]$$

ab. Mit Hilfe dieser beiden Reihen berechne man die Logarithmen der ersten zehn auf einander folgenden Primzahlen und gebe an, wie viele Glieder benützt werden müssen, um $l\,19$ auf 30 Dezimalen genau zu erhalten?

67) Es ist die Richtigkeit der folgenden Reihenentwicklungen nachzuweisen:

a) $$l(x+10) = l(x+8) + l(x+4) - l(x-2) -$$
$$- 2\left[\frac{6}{x^2+12x+26} + \frac{1}{3}\left(\frac{6}{x^2-12x+26}\right)^3 +\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\left(\frac{6}{x^2+12x+26}\right)^5 + \ldots\right]$$

$b)\ l(x-10) = l(x-8) + l(x-2) - lx -$

$$-2\left[\frac{8}{x^2-10x+8}+\frac{1}{3}\left(\frac{8}{x^2-10x+8}\right)^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{5}\left(\frac{8}{x^2-10x+8}\right)^5+\ldots\right]$$

68) Folgende Reihen, welche sämmtlich $l\,2$ als Summe besitzen, sind abzuleiten:

$$a)\ \frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^4+\ldots\right]$$

$$b)\ \frac{1}{3}\left[\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{7}{8}\right)^3+\frac{1}{4}\left(\frac{7}{8}\right)^4+\ldots\right]$$

$$c)\ \left(\frac{1}{8}-\frac{1}{2.8^2}+\frac{1}{3.8^3}-\frac{1}{4.8^4}+\ldots\right)+$$

$$+2\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2.4^2}+\frac{1}{3.4^3}+\ldots\right)$$

$$d)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{4.2^4}+\ldots$$

Wenn mit Hilfe dieser Reihen $l\,2$ bis auf 4 Dezimalstellen genau berechnet werden sollte, wie viele Glieder würde man von jeder dieser Reihen beibehalten müssen?

69) Man beweise ferner, dass

$$l\,3=\frac{1}{2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^3}+\frac{1}{4.2^4}+\ldots+$$

$$+2\left(1+\frac{1}{3.5^3}+\frac{1}{5.5^5}+\frac{1}{7.5^7}+\ldots\right)$$

$$l\,5=1+\frac{1}{2.2}+\frac{1}{3.2^2}+\frac{1}{4.2^3}+\ldots+$$

$$+2\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{3.7^3}+\frac{1}{5.7^5}+\frac{1}{7.7^7}+\ldots\right)-$$

$$-2\left(\frac{1}{31}+\frac{1}{3.31^3}+\frac{1}{5.31^5}+\frac{1}{7.31^7}+\ldots\right)$$

$$l\,10 = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \dots\right) +$$
$$+ \frac{4}{5}\left(1 + \frac{1}{3.25} + \frac{1}{5.25^2} + \frac{1}{7.25^3} + \dots\right) +$$
$$+ \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \frac{1}{7.361^3} + \dots\right)$$

$$l\,10 = 2\left(1 + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.9^2} + \frac{1}{7.9^3} + \dots\right) +$$
$$+ \frac{1}{17}\left(1 + \frac{1}{3.289} + \frac{1}{5.289^2} + \frac{1}{7.289^3} + \dots\right) +$$
$$+ \frac{2}{19}\left(1 + \frac{1}{3.361} + \frac{1}{5.361^2} + \frac{1}{7.361^3} + \dots\right)$$

70) **Folgende Reihen sind abzuleiten:**

a)
$$
\begin{aligned}
l\,2 = {} & \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \dots \\
& + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots \\
& + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{6^5} + \dots \\
& + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^4} + \frac{1}{8^5} + \dots \\
& \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

b)
$$
\begin{aligned}
1 - l\,2 = {} & \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots \\
& + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{5^5} + \dots \\
& + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \dots \\
& + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{9^5} + \dots \\
& \quad\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
c)\; l2 - \frac{1}{2} = & \;\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \cdots \\
& + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^7} + \frac{1}{4^9} + \cdots \\
& + \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^5} + \frac{1}{6^7} + \frac{1}{6^9} + \cdots \\
& + \frac{1}{8^3} + \frac{1}{8^5} + \frac{1}{8^7} + \frac{1}{8^9} + \cdots \\
& \quad\;\vdots \qquad\; \vdots \qquad\; \vdots \qquad\; \vdots \\
& = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{7.8.9} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d)\; \frac{3}{4} - l2 = & \;\frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \cdots \\
& + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{5^9} + \cdots \\
& + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{7^9} + \cdots \\
& + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{9^7} + \frac{1}{9^9} + \cdots \\
& \quad\;\vdots \qquad\; \vdots \qquad\; \vdots \qquad\; \vdots \\
& = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{8.9.10} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
e)\quad \frac{1}{4}\, l2 = & \;\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^8} + \cdots \\
& + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{7^8} + \cdots \\
& + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{11^4} + \frac{1}{11^6} + \frac{1}{11^8} + \cdots \\
& + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{15^4} + \frac{1}{15^6} + \frac{1}{15^8} + \cdots \\
& \quad\;\vdots \qquad\; \vdots \qquad\; \vdots \qquad\; \vdots \\
& = \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9} + \cdots \\
& \quad\; \frac{1}{6^3} + \frac{1}{6^5} + \frac{1}{6^7} + \frac{1}{6^9} + \cdots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
 & \dfrac{1}{10^3} & + \dfrac{1}{10^5} & + \dfrac{1}{10^7} & + \dfrac{1}{10^9} & + \cdots \\
 & \dfrac{1}{14^3} & + \dfrac{1}{14^5} & + \dfrac{1}{14^7} & + \dfrac{1}{14^9} & + \cdots \\
 & \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \\
= & \dfrac{1}{1.2.3} & + \dfrac{1}{5.6.7} & + \dfrac{1}{9.10.11} & + \dfrac{1}{13.14.15} & + \cdots
\end{array}
$$

$$
f)\ \frac{1}{4}(1-l2) =
\begin{array}{llllll}
 & \dfrac{1}{5^2} & + \dfrac{1}{5^4} & + \dfrac{1}{5^6} & + \dfrac{1}{5^8} & + \cdots \\
+ & \dfrac{1}{9^2} & + \dfrac{1}{9^4} & + \dfrac{1}{9^6} & + \dfrac{1}{9^8} & + \cdots \\
+ & \dfrac{1}{13^2} & + \dfrac{1}{13^4} & + \dfrac{1}{13^6} & + \dfrac{1}{13^8} & + \cdots \\
+ & \dfrac{1}{17^2} & + \dfrac{1}{17^4} & + \dfrac{1}{17^6} & + \dfrac{1}{17^8} & + \cdots \\
 & \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots &
\end{array}
$$

$$
g)\qquad \frac{1}{2}l2 =
\begin{array}{llllll}
 & \dfrac{1}{2^2} & + \dfrac{1}{4^2} & + \dfrac{1}{6^2} & + \dfrac{1}{8^2} & + \cdots \\
- & \dfrac{1}{2^3} & + \dfrac{1}{4^3} & - \dfrac{1}{6^3} & + \dfrac{1}{8^3} & - \cdots \\
+ & \dfrac{1}{2^4} & + \dfrac{1}{4^4} & + \dfrac{1}{6^4} & + \dfrac{1}{8^4} & + \cdots \\
- & \dfrac{1}{2^5} & + \dfrac{1}{4^5} & - \dfrac{1}{6^5} & + \dfrac{1}{8^5} & - \cdots \\
 & \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots &
\end{array}
$$

$$
h)\ \frac{1}{2}(1-l2) =
\begin{array}{llllll}
 & \dfrac{1}{2^3} & + \dfrac{1}{2^5} & + \dfrac{1}{2^7} & + \dfrac{1}{2^9} & + \cdots \\
- & \dfrac{1}{4^3} & - \dfrac{1}{4^5} & - \dfrac{1}{4^7} & - \dfrac{1}{4^9} & - \cdots \\
+ & \dfrac{1}{6^3} & + \dfrac{1}{6^5} & + \dfrac{1}{6^7} & + \dfrac{1}{6^9} & + \cdots \\
- & \dfrac{1}{8^3} & - \dfrac{1}{8^5} & - \dfrac{1}{8^7} & - \dfrac{1}{8^9} & - \cdots \\
 & \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \\
= & \dfrac{1}{1.2.3} & - \dfrac{1}{3.4.5} & + \dfrac{1}{5.6.7} & - \dfrac{1}{7.8.9} & + \cdots
\end{array}
$$

$$i)\ \frac{3}{4}l2 - \frac{1}{2} = \begin{array}{lllll} \frac{1}{4^3} + & \frac{1}{4^5} + & \frac{1}{4^7} + & \frac{1}{4^9} & + \dots \\ \frac{1}{8^3} + & \frac{1}{8^5} + & \frac{1}{8^7} + & \frac{1}{8^9} & + \dots \\ \frac{1}{12^3} + & \frac{1}{12^5} + & \frac{1}{12^7} + & \frac{1}{12^9} & + \dots \\ \frac{1}{16^3} + & \frac{1}{16^5} + & \frac{1}{16^7} + & \frac{1}{16^9} & + \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{array}$$

$$= \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{11.12.13} + \frac{1}{15.16.17} + \dots$$

71) Die Funktionen

$$\frac{l(1+x)}{1-x} \text{ und } \frac{2+x}{x} l(1+x)$$

sind in Potenzreihen zu verwandeln.

72) Ferner sind die Ausdrücke:

$a)$ $-x + l\left[(1+x)\sqrt{1+x^2}\right]$

$b)$ $x - l\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}$

in Reihen zu verwandeln. Gelten diese Reihen auch noch für $x = 1$ und welche bemerkenswerthe Formeln findet man in diesem Falle?

73) Für folgende Ausdrücke sind Reihen zu entwickeln, welche nach den steigenden Potenzen von x fortschreiten:

$a)$ $l\left(\dfrac{1+x}{1-x+x^2}\right)$

$b)$ $l\left[\dfrac{(1+x)^2}{1-x+x^2}\right]$

$c)$ $l\left(\dfrac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\right)$

$d)$ $l\left(\dfrac{1-x+x^2-x^3+\dots\dots+x^{2n}}{1+x+x^2+x^3+\dots\dots+x^{2n}}\right)$

74) Die Funktion $l(1+x)$ ist in eine Reihe von der Form $A_1 x(1-x) + A_2 x^2(1-x^2) + A_3 x^3(1-x^3) + \dots$ zu entwickeln.

75) Die Ausdrücke

$$\frac{l(1+x)}{1+x} \text{ und } \frac{1}{1+x}\, l\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

sind in Reihen zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen von x geordnet sind. Für dieselben Ausdrücke entwickle man auch Reihen von der Form

$$b_1\left(\frac{x}{1+x}\right) + b_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + b_3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + b_4\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots.$$

und drücke den Coefficienten b_{n+1} durch den Coefficienten der Potenzreihen aus. Welche bemerkenswerthe Relationen zwischen den Binomialcoefficienten der n^{ten} Potenz erhält man auf diese Weise?

76) Aus der Formel

$$\frac{1}{2}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots..$$

$$-1 < x < +x$$

ist die Gleichung

$$\frac{l(y+\sqrt{1+y^2})}{\sqrt{1+y^2}} = y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{2.4}{3.5}y^5 - \frac{2.4.6}{3.5.7}y^7 + \ldots.$$

$$-1 < y < +1$$

abzuleiten.

77) Es ist die Gleichung

$$y^2 = 1 - 2x\cos\alpha + x^2$$

gegeben; man entwickle $l y$ in eine Potenzenreihe von x; ferner verwandle man die Ausdrücke

$$\frac{1}{4}\, l\frac{1+2x\sin\alpha+x^2}{1-2x\sin\alpha+x^2}$$

$$\frac{1}{4}\, l\frac{1+2x\cos\alpha+x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$

in Potenzreihen. Welche bemerkenswerthe Formeln ergeben sich hieraus

a) für $x = 1$

b) für $x = 1$ und $\alpha = \frac{\pi}{3}$

c) für $x = 1$ und $\alpha = \frac{\pi}{4}$

d) für $x = 1$ und $\alpha = \frac{\pi}{6}$

78) Man entwickle in Reihen, welche nach steigenden Potenzen von x fortschreiten:

$$y_1 = \frac{1}{4}\, l\, \frac{1 - 2x\cos 2\alpha + x^2}{(1-x)^2}$$

$$y_2 = -\frac{1}{4}\, l\, [(1 - 2\cos 2\alpha + x^2)\,(1 - x^2)]$$

$$y_3 = \frac{1}{8}\, l \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1 - 2x\cos 2\alpha + x^2}{1 + 2x\cos 2\alpha + x^2}\right]$$

$$y_4 = \frac{1}{8}\, l \left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \frac{1 + 2x\cos 2\alpha + x^2}{1 - 2x\cos 2\alpha + x^2}\right]$$

79) Es ist der Ausdruck

$$l\,(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\,(1-x^4)\,\ldots\ldots$$

in eine Reihe zu verwandeln von der Form

$$a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + a_4\, x^4 + \ldots\ldots$$

und zu zeigen, dass der numerische Werth von a_n erhalten wird, indem man die Summen aller Theiler der Zahl n durch n dividirt.

80) Denselben Ausdruck entwickle man in eine Reihe von der Form

$$a_1\left(\frac{x}{1-x}\right) + a_2\left(\frac{x^2}{1-x^2}\right) + a_3\left(\frac{x^3}{1-x^3}\right) + a_4\left(\frac{x^4}{1-x^4}\right) + \ldots$$

81) Man entwickle den Logarithmus der unendlichen als unbedingt convergent vorausgesetzten Reihe:

$$(1 + A_1\, x + A_2\, x^2 + A_3\, x^3 + A_4\, x^4 + \ldots.)$$

in eine Potenzreihe.

82) Der Logarithmus der unendlichen convergenten Reihe

$$(A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + A_3\, x^3 + A_4\, x^4 + \ldots..)$$

ist in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe zu verwandeln.

83. Mit Zuhilfenahme der in den beiden vorhergehenden Aufgaben gewonnenen Beziehungen verwandle man in Reihen:

a) $ll(1+x)$

b) $l\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots\right)$

c) $l\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots\right)$

d) $l\left(x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-\ldots\right)$

e) $l\left(x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{x^7}{7}+\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{x^9}{9}+\ldots\right)$

f) $l\left(\dfrac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\frac{x^9}{9!}-\ldots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}-\ldots}\right)$

D. Ueber gonionometrische und cyclometrische Reihen.

84) Man stelle
$f(x) = \sin x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von

$$\cos x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \sec x.$$

85) Man stelle
$f(x) = \cos x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von

$$\sin x, \quad \operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \operatorname{cosec} x.$$

86) Man stelle
$f(x) = \operatorname{tang} x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x.$$

87) Man stelle
$f(x) = \cot x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von

$$\sin x, \quad \cos x, \quad \sec x, \quad \operatorname{cosec} x.$$

88) Man stelle
$f(x) = \sec x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von
$$\sin x,\quad \operatorname{tang} x,\quad \cot x,\quad \operatorname{cosec} x.$$

89) Man stelle
$f(x) = \operatorname{cosec} x$ durch Reihen dar, welche geordnet erscheinen nach den Potenzen von
$$\cos x,\quad \operatorname{tang} x,\quad \cot x,\quad \sec x.$$

90) Man verwandle
$f(x) = \sin x$ in Reihen, welche fortschreiten nach den steigenden Potenzen von
$$\sin\frac{x}{2},\quad \cos\frac{x}{2},\quad \operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

91) Man verwandle
$f(x) = \cos x$ in Reihen, welche fortschreiten nach den steigenden Potenzen von
$$\sin\frac{x}{2},\quad \cos\frac{x}{2},\quad \operatorname{tang}\frac{x}{2}.$$

92) Es sind
$$f(x) = \sin x \text{ und } F(x) = \cos x$$
in Reihen zu verwandeln, welche geordnet sind nach den steigenden Potenzen von
$$\sin 2x,\quad \cos 2x.$$

93) Man entwickle ferner folgende Funktionen in Reihen:

a) $\dfrac{m \sin 2x + n \sin x}{p \cos x}$

b) $\cos x \,.\, \operatorname{tang} 2x$

c) $\sin x \,.\, \cos 2x$

und zwar:

a) in eine Reihe, welche nach den steigenden Potenzen von $\operatorname{tang}\frac{x}{2}$,

b) in eine Reihe, welche nach den steigenden Potenzen von $\sin 2x$,

c) in eine Reihe, welche nach den steigenden Potenzen von $\cos 2x$ fortschreitet.

94) Es sei $u_0 = \sin x \qquad t_0 = \cos x$

$$\begin{array}{ll} u_1 = \sin(x+h) & t_1 = \cos(x+h) \\ u_2 = \sin(x+2h) & t_2 = \cos(x+2h) \\ u_3 = \sin(x+3h) & t_3 = \cos(x+3h); \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \end{array}$$

man betrachte $u_0, u_1, u_2, u_3 \ldots\ldots$ und

$t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots$

als Glieder von Reihen und drücke für jede dieser Reihen das Anfangsglied der n^{ten} Differenzenreihe durch eine nach den steigenden Potenzen von h fortschreitende Reihe aus. — Zwischen welchen Grenzen liegt der begangene Fehler, wenn man von der Entwicklung blos das erste Glied beibehält?

Es sei ferner $x = \frac{\pi}{6}$, und man soll bei einer Genauigkeit auf 10 Dezimalstellen

$$\begin{array}{lllll} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & \ldots\ldots \\ t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & \ldots\ldots \end{array}$$

als Glieder einer arithmetischen Reihe der zweiten Ordnung betrachten können; wie gross höchstens darf h in diesem Falle sein?

95) Es sind folgende Reihenentwicklungen zu beweisen:

$$a) \; \frac{a}{a^2 + \operatorname{tang}^2 \varphi} = \cos\varphi \,.\, \cos\varphi + (1-a)\cos^2\varphi \cos 2\varphi + + (1-a)^2 \cos^3\varphi \cos 3\varphi + \ldots$$

$$b) \; \frac{\operatorname{tang}\varphi}{a^2 + \operatorname{tang}^2\varphi} = \cos\varphi \sin\varphi + (1-a)\cos^2\varphi \sin 2\varphi + + (1-a)^2 \cos^3\varphi \sin 3\varphi + \ldots$$

$$c) \; \frac{1}{\varphi} - \frac{1}{\operatorname{tang}\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{4} + + \frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{8} + \frac{1}{16}\operatorname{tang}\frac{\varphi}{16} + \ldots$$

96) Es seien

$u_0 = \log\sin x,\; u_1 = \log\sin(x+h),\; u_2 = \log\sin(x+2h),$
$u_3 = \log\sin(x+3h), \ldots\ldots\ldots$

die Glieder einer Reihe; man entwickle u_1, u_2, u_3 in Reihen, welche nach den steigenden Potenzen von h fortschreiten, berechne $\triangle^3 u_0$ und gebe für $x = \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$ die obere Grenze für das Intervall h an, um bei einer Genauigkeit auf 6 Dezimalstellen die obige Reihe als eine arithmetische der zweiten Ordnung behandeln zu können.

97) Dieselbe Aufgabe führe man durch für
$u_0 = \log\cos x$, $u_1 = \log\cos(x + h)$, $u_2 = \log\cos(x + 2h)$, $u_3 = \log\cos(x + 3h)$, ...

98) Die Funktion $l\operatorname{cosec} x$ ist in eine Reihe zu verwandeln, welche nach den steigenden Potenzen von $\cos^2 x$ fortschreitet.

99) Man entwickle den Ausdruck $x \operatorname{arctang} x$ in eine Reihe von der Form

$$A_1 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right) + A_2 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2 + A_3 \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^3 + \ldots\ldots$$

Welche bemerkenswerthe Eigenschaft der Binomialcoefficienten lässt sich aus der Vergleichung dieser Reihe mit

$$x \operatorname{arctang} x = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5} - \frac{x^8}{7} + \ldots.$$

ableiten?

100) Man entwickle in Potenzenreihen:

a) $\frac{1}{4}\, l\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + \frac{1}{2} \operatorname{arctang} x$

b) $\frac{1}{12}\, l\, \frac{(1+x)^2(1+x+x^2)}{(1-x)^2(1-x+x^2)} + \frac{1}{6}\sqrt{3} \operatorname{arctang} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$

c) $\frac{1}{6}\, l\, \frac{1-x+x^2}{(1+x)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{arctang} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}\right)$

101) Man beweise:

$$\operatorname{arctang} x = \frac{2x}{4+x^2}\left[1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right) + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{4+x^2}\right)^2 + \right.$$

$$+ \frac{2x+x^3}{4+5x^2+x^4}\left(1 + \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{4+5x^2+x^4}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{x^2}{4+5x^2+x^4}\right) + \ldots\right]$$

102) Es sei $\operatorname{tang} y = \frac{x \sin \alpha}{1 - x \cos \alpha}$;

man entwickle y in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe.

103) Folgende Funktionen sind in Reihen zu verwandeln:

a) $2 \operatorname{arctang} \frac{x}{2-x}$

b) $2 \operatorname{arctang} (x - 1)$

104) Es ist die Richtigkeit der folgenden Reihenentwicklung nachzuweisen:

$$\operatorname{arctang}(x + h) = \operatorname{arctang} x + \sin u \,.\, \sin u -$$
$$- \frac{h^2}{2} \sin^2 u \sin 2u + \frac{h^3}{3} \sin^3 u \sin 3u - \ldots\ldots$$

wobei $\cot u = x$.

105) Es ist der Ausdruck

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

in eine Potenzenreihe von x zu verwandeln.

106) Es ist die zur Berechnung der Ludolph'schen Zahl von Sharp und Lagny benützte Reihe

$$\pi = 16 \sqrt{3} \left(\frac{1}{1.3.3} + \frac{2}{5.7.3^3} + \frac{3}{9.11.3^5} + \ldots\right)$$

abzuleiten.

107) Man beweise folgende Reihen, welche mit Vortheil zur Berechnung von π benützt werden können.

$$a)\ \pi = 8 \left(\frac{26}{3.3^3} + \frac{58}{5.7.3^7} + \frac{90}{9.11.3^{11}} + \ldots\right) +$$
$$+ 8 \left(\frac{73}{3.7^3} + \frac{169}{5.7.7^7} + \frac{265}{9.11.7^{11}} + \ldots\right)$$

$$b)\ \pi = \frac{20}{7}\left(1 - \frac{1}{3.7^2} + \frac{1}{5.7^4} - \frac{1}{7.7^6} + \ldots\right) +$$
$$+ \frac{32}{79}\left(1 - \frac{1}{3.79^2} + \frac{1}{5.79^4} - \frac{1}{7.79^6} + \ldots\right)$$

$$c)\ \frac{\pi}{4}=\frac{296}{125}\left(\frac{1}{1.3}+\frac{1}{5.7.25^2}+\frac{1}{9.11.25^4}+\dots\right)+$$
$$+\frac{384}{125}\left(\frac{1}{5.7.25^2}+\frac{2}{9.11.25^4}+\frac{3}{13.15.25^6}+\dots\right)-$$
$$-\frac{171362}{239^3}\left(\frac{1}{1.3}+\frac{9}{5.7.239^2}+\frac{1}{9.11.239^4}+\dots\right)-$$
$$-\frac{228480}{239^3}\left(\frac{1}{5.7.239^2}+\frac{2}{9.11.239^4}+\frac{3}{13.15.239^6}+\dots\right)$$

$$d)\ \frac{\pi}{4}=8\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{3.10^3}+\frac{1}{5.10^5}-\dots\right)-$$
$$-4\left(\frac{1}{515}-\frac{1}{3.515^3}+\frac{1}{5.515^5}-\dots\right)-$$
$$-\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3.239^3}+\frac{1}{5.239^5}-\dots\right)$$

$$e)\ \frac{\pi}{4}=\frac{5}{7}\left(1-\frac{1}{3.7^2}+\frac{1}{5.7^4}-\dots\right)+$$
$$+\frac{1}{13}\left(1-\frac{1}{3.26^2}+\frac{1}{5.26^4}-\dots\right)-$$
$$-\frac{1}{2057}\left(1-\frac{1}{3.2057^2}+\frac{1}{5.2057^4}-\dots\right)$$

$$f)\ \pi=\frac{24}{10}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{10^3}+\dots\right)+$$
$$+\frac{56}{100}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{100}+\frac{2.4}{3.5}\left(\frac{2}{100}\right)^2+\frac{2.4.6}{3.5.7}\left(\frac{2}{100}\right)^3+\dots\right)$$

$$g)\ \pi=\frac{32}{17}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{17}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{17^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{17^3}+\dots\right)+$$
$$+\frac{28}{50}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{50}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{50^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{50^3}+\dots\right)+$$
$$+\frac{104}{170}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{170}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{170^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{170^3}+\dots\right)$$

$$h)\ \pi=\frac{96}{37}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{37}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{37^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{37^3}+\dots\right)+$$
$$+\frac{248}{481}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{962}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{962^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{962^3}+\dots\right)-$$
$$-\frac{478}{28561}\left(1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{57122}+\frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{57122^2}+\frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{57122^3}+\dots\right)$$

Wenn mit Hilfe der vorstehenden Reihen π auf 6 Dezimalstellen genau berechnet werden sollte; wie viele Glieder hätte man von jeder Reihe beizubehalten?

108) Man beweise ferner:

$$a)\ \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2^2} + \frac{1}{2^2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2^4} + \ldots.$$

$$b)\ \frac{4}{\pi} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^2}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2^4} + \frac{1}{2^3}\,\mathrm{tang}\,\frac{\pi}{2^5} + \ldots.$$

$$c)\ \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + \ldots.$$

$$d)\ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{12^2-1} + \frac{1}{16^2-1} + \ldots.$$

$$\begin{aligned} e)\ \frac{\pi}{4} - 1 = & -\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} - \ldots. \\ & -\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} - \ldots. \\ & -\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^5} - \ldots. \\ & -\frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \frac{1}{9^4} - \frac{1}{9^5} - \ldots. \end{aligned}$$

$$f)\ \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \ldots.$$

$$g)\ \frac{\pi}{4} - l\,2 = 2\left\{\begin{array}{llll} \ \frac{1}{3^3} & + \frac{1}{(3^3)^3} & + \frac{1}{(3^5)^3} & + \ldots. \\ + \frac{1}{3^5} & + \frac{1}{(3^3)^5} & + \frac{1}{(3^5)^5} & + \ldots. \\ \ \ \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \\ + \frac{1}{7^3} & + \frac{1}{(7^3)^3} & + \frac{1}{(7^5)^3} & - \ldots. \\ + \frac{1}{7^5} & + \frac{1}{(7^3)^5} & + \frac{1}{(7^5)^5} & + \ldots. \\ \ \ \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \\ + \frac{1}{11^3} & + \frac{1}{(11^3)^3} & + \frac{1}{(11^5)^3} & + \ldots. \\ + \frac{1}{11^5} & + \frac{1}{(11^3)^5} & + \frac{1}{(11^5)^5} & + \ldots. \\ \ \ \vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{3^3-1} + \frac{1}{3^3+1} + \frac{1}{3^5-1} + \frac{1}{3^5+1} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{7^3-1} + \frac{1}{7^3+1} + \frac{1}{7^5-1} + \frac{1}{7^5+1} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{8.9.10} + \frac{2}{12.13.14} + \frac{2}{16.17.18} + \cdots$$

$$h)\ \frac{3}{4} - \frac{l2}{2} - \frac{\pi}{8} = \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{5^3} + \frac{1}{(5^2)^3} + \frac{1}{(5^3)^3} + \cdots \\ + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{(5^2)^5} + \frac{1}{(5^3)^5} + \cdots \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{(9^2)^3} + \frac{1}{(9^3)^3} + \cdots \\ + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{(9^2)^5} + \frac{1}{(9^3)^5} + \cdots \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{(13^2)^3} + \frac{1}{(13^3)^3} + \cdots \\ + \frac{1}{13^5} + \frac{1}{(13^2)^5} + \frac{1}{(13^3)^5} + \cdots \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right.$$

$$= \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{5^3-1} + \frac{1}{5^5-1} + \frac{1}{5^7-1} + \cdots \\ + \frac{1}{9^3-1} + \frac{1}{9^5-1} + \frac{1}{9^7-1} + \cdots \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \cdots$$

$$i)\ \frac{\pi-3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \frac{1}{8.9.10} + \cdots$$

$$k)\ \pi = 48\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{1}{1.7} + \frac{1}{9.15} + \frac{1}{17.23} + \frac{1}{25.31} + \cdots\right)$$

$$l)\ \pi = 16\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{11.13} + \frac{1}{19.21} + \frac{1}{27.29} + \cdots\right)$$

Wenn mit Hilfe der vorstehenden Reihen π auf 6 Dezimalstellen genau berechnet werden sollte; wie viele Glieder hätte man von jeder Reihe beizubehalten?

108) Man beweise ferner:

$$a)\ \frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^4} + \ldots.$$

$$b)\ \frac{4}{\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^3} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^4} + \frac{1}{2^3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{2^5} + \ldots.$$

$$c)\ \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \frac{1}{10^2-1} + \frac{1}{14^2-1} + \ldots.$$

$$d)\ \frac{1}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{8^2-1} + \frac{1}{12^2-1} + \frac{1}{16^2-1} + \ldots.$$

$$\begin{aligned} e)\ \frac{\pi}{4} - 1 = & -\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} - \ldots. \\ & -\frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} - \frac{1}{5^5} - \ldots. \\ & -\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{7^5} - \ldots. \\ & -\frac{1}{9^2} - \frac{1}{9^3} - \frac{1}{9^4} - \frac{1}{9^5} - \ldots. \end{aligned}$$

$$f)\ \frac{\pi}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{3^9} + \ldots.$$

$$g)\ \frac{\pi}{4} - l2 = 2\left\{\begin{array}{llllllll} & \frac{1}{3^3} & + & \frac{1}{(3^3)^3} & + & \frac{1}{(3^5)^3} & + & \ldots. \\ + & \frac{1}{3^5} & + & \frac{1}{(3^3)^5} & + & \frac{1}{(3^5)^5} & + & \ldots. \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ + & \frac{1}{7^3} & + & \frac{1}{(7^3)^3} & + & \frac{1}{(7^5)^3} & - & \ldots. \\ + & \frac{1}{7^5} & + & \frac{1}{(7^3)^5} & + & \frac{1}{(7^5)^5} & + & \ldots. \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ + & \frac{1}{11^3} & + & \frac{1}{(11^3)^3} & + & \frac{1}{(11^5)^3} & + & \ldots. \\ + & \frac{1}{11^5} & + & \frac{1}{(11^3)^5} & + & \frac{1}{(11^5)^5} & + & \ldots. \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \end{array}\right.$$

$$= \frac{1}{3^3-1} + \frac{1}{3^3+1} + \frac{1}{3^5-1} + \frac{1}{3^5+1} + \cdots$$
$$+ \frac{1}{7^3-1} + \frac{1}{7^3+1} + \frac{1}{7^5-1} + \frac{1}{7^5+1} + \cdots$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \frac{2}{4.5.6} + \frac{2}{8.9.10} + \frac{2}{12.13.14} + \frac{2}{16.17.18} + \cdots$$

$$h)\ \frac{3}{4} - \frac{l2}{2} - \frac{\pi}{8} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5^3} + \frac{1}{(5^2)^3} + \frac{1}{(5^3)^3} + \cdots \\ + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{(5^2)^5} + \frac{1}{(5^3)^5} + \cdots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{(9^2)^3} + \frac{1}{(9^3)^3} + \cdots \\ + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{(9^2)^5} + \frac{1}{(9^3)^5} + \cdots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ + \frac{1}{13^3} + \frac{1}{(13^2)^3} + \frac{1}{(13^3)^3} + \cdots \\ + \frac{1}{13^5} + \frac{1}{(13^2)^5} + \frac{1}{(13^3)^5} + \cdots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{5^3-1} + \frac{1}{5^5-1} + \frac{1}{5^7-1} + \cdots \\ + \frac{1}{9^3-1} + \frac{1}{9^5-1} + \frac{1}{9^7-1} + \cdots \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \end{array} \right.$$

$$= \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \cdots$$

$$i)\ \frac{\pi-3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \frac{1}{8.9.10} + \cdots$$

$$k)\ \pi = 48\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{1}{1.7} + \frac{1}{9.15} + \frac{1}{17.23} + \frac{1}{25.31} + \cdots\right)$$

$$l)\ \pi = 16\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\frac{1}{3.5} + \frac{1}{11.13} + \frac{1}{19.21} + \frac{1}{27.29} + \cdots\right)$$

$$m)\ \frac{\pi}{4}=\left(\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{3.2^4}\right)-\left(\frac{1}{5.2^7}+\frac{1}{6.2^8}+\frac{1}{7.2^{10}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9.2^{13}}+\frac{1}{10.2^{14}}+\frac{1}{11.2^{16}}\right)-\cdots$$
$$-\left(\frac{1}{1.2^3}+\frac{1}{2.2^5}+\frac{1}{3.2^8}\right)-\left(\frac{1}{5.2^{13}}+\frac{1}{6.2^{15}}+\frac{1}{7.2^{18}}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9.2^{23}}+\frac{1}{10.2^{25}}+\frac{1}{11.2^{28}}\right)-\cdots$$

$$n)\ \frac{4}{\pi}=\begin{cases}1+\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{3\pi}{12}+\frac{1}{9}\operatorname{tang}\frac{7\pi}{36}+\frac{1}{27}\operatorname{tang}\frac{19\pi}{108}+\cdots\\ \quad-\frac{1}{3}\operatorname{tang}\frac{\pi}{12}-\frac{1}{9}\operatorname{tang}\frac{5\pi}{36}-\frac{1}{27}\operatorname{tang}\frac{17\pi}{108}-\cdots\end{cases}$$

VIII. Ueber unendliche Produkte.

Man untersuche folgende unendliche Produkte bezüglich ihrer Convergenz oder Divergenz.

1) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots$

2) $\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{7}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right)\cdots$

3) $\left(1-\frac{2}{9}\right)\left(1-\frac{2.5}{9.11}\right)\left(1-\frac{2.5.8}{9.11.13}\right)\left(1-\frac{2.5.8.11}{9.11.13.15}\right)\cdots$

4) $\left(1-\frac{3^2}{2^4}\right)\left(1-\frac{4^3}{3^5}\right)\left(1-\frac{5^4}{4^6}\right)\left(1-\frac{6^5}{5^7}\right)\cdots$

5) $\left(1+\log\sqrt{2}\right)\left(1+\log\sqrt[3]{3}\right)\left(1+\log\sqrt[4]{4}\right)\left(1+\log\sqrt[5]{5}\right)\cdots$

6) $\left[1+\frac{1}{2}l2\right]\left[1+\frac{2}{3}l\left(\frac{3}{2}\right)\right]\left[1+\frac{3}{4}l\left(\frac{4}{3}\right)\right]\left[1+\frac{4}{5}l\left(\frac{5}{4}\right)\right]\cdots$

7) $\left[1+l2\right]\left[1+l\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\right]\left[1+l\left(\sqrt[3]{\frac{4}{3}}\right)\right]\left[1+l\left(\sqrt[4]{\frac{5}{4}}\right)\right]\cdots$

8) $\left[1+(m)_1(p)_1\right]\left[1+(m)_2(p)_2\right]\left[1+(m)_3(p)_3\right]\left[1+(m)_4(p)_4\right]\cdots$

9) $\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}}}\right)\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}}}\right)\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}}}\right)\left(1+\frac{1}{e^{\frac{4}{2}+\frac{7}{2.3}+\frac{10}{3.5}+\frac{13}{4.7}}}\right)\cdots$

10) $\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 2}}\right)\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 3}}\right)\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 4}}\right)\left(1-\frac{1}{a\sqrt{\log 5}}\right)\cdots$

11) $\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right)\left(1-\frac{1.1}{2.4}\cdot\frac{\pi^2}{4}\right)\left(1-\frac{1.1.3}{2.4.6}\cdot\frac{\pi^3}{8}\right)\left(1-\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\cdot\frac{\pi^4}{16}\right)\cdots$

12) $\left(1-\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{\pi}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\operatorname{tang}\frac{\pi}{8}\right)\left(1-\frac{1}{8}\operatorname{tang}\frac{\pi}{16}\right)\times$

$\times\left(1-\frac{1}{16}\operatorname{tang}\frac{\pi}{32}\right)\cdots\cdots$

13) $\left(1-2\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)\left(1-\frac{2^2}{2}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{4}\right)\left(1-\frac{2^3}{3}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{8}\right)\times$

$\times\left(1-\frac{2^4}{4}\operatorname{tang}\frac{\sqrt{\pi}}{16}\right)\cdots\cdots$

14) $\left(1+\frac{\sin 1}{1}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{1}{2}}{2}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{1}{3}}{3}\right)\left(1+\frac{\sin\frac{1}{4}}{4}\right)\cdots\cdots$

15) $\left(1+\frac{1}{1}\right)\sqrt{1+\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{1+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[4]{1+\frac{1}{4}}\cdots\cdots$

16) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[4]{4}\,.\,\sqrt[5]{5}\cdots\cdots$

17) $\sqrt{2}\,.\,\sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^2}\cdot\sqrt[4]{\left(\frac{4}{3}\right)^3}\cdot\sqrt[5]{\left(\frac{5}{4}\right)^4}\cdots\cdots$

18) $\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$

19) $\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1+\frac{1}{\sqrt{4}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdots\cdots$

20) $\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$

21) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1+\frac{2.3}{5.6}\right)\left(1-\frac{2.3.4}{5.6.7}\right)\cdots\cdots$

22) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{1.2}{3.5}\right)\left(1+\frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6}\right)\left(1-\frac{1.2}{3.5}\cdot\frac{2.3}{4.6}\cdot\frac{3.4}{5.7}\right)\ldots.$

23) $\left[1+\frac{2a}{2a+1}\right]\left[1-\frac{4a\,(a+1)}{(2a+1)\,(2a+3)}\right]\times$

$\times\left[1+\frac{8a\,(a+1)\,(a+2)}{(2a+1)\,(2a+3)\,(2a+5)}\right]\times$

$\times\left[1-\frac{16a\,(a+1)\,(a+2)\,(a+3)}{(2a+1)\,(2a+3)\,(2a+5)\,(2a+7)}\right]\ldots.$

24) $\left(1-\log\sqrt{2}\right)\left(1+\log\sqrt[3]{3}\right)\left(1-\log\sqrt[4]{4}\right)\left(1+\log\sqrt[5]{5}\right)\ldots.$

25) $\left(1+\sqrt{l(2)}\right)\left(1-\sqrt{l\left(\frac{3}{2}\right)}\right)\left(1+\sqrt{l\left(\frac{4}{3}\right)}\right)\left(1-\sqrt{l\left(\frac{5}{4}\right)}\right)\ldots$

26) $\left(1-\sqrt{\sqrt{e}-1}\right)\left(1+\sqrt{\sqrt[3]{e}-1}\right)\left(1-\sqrt{\sqrt[4]{e}-1}\right)\times$

$\times\left(1+\sqrt{\sqrt[5]{e}-1}\right)\ldots..$

27) $\left(1+\sin 1\right)\left(1-\sin\frac{1}{2}\right)\left(1+\sin\frac{1}{3}\right)\left(1-\sin\frac{1}{4}\right)\ldots..$

28) $\left(1-\cos 1\right)\left(1+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\cos\frac{1}{4}\right)\ldots..$

29) $\left(1+\operatorname{tang} 1\right)\left(1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}\right)\left(1+\operatorname{tang}\frac{1}{3}\right)\left(1-\operatorname{tang}\frac{1}{4}\right)\ldots.$

30) $\left(1+\arcsin 1\right)\left(1-\arcsin\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1+\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\times$

$\times\left(1-\arcsin\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\ldots..$

31) $\left(1+1\right)\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}\cos a}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}\cos a\cos\frac{a}{2}}\right)\times$

$\times\left(1-\sqrt{\frac{1}{4}\cos a\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a}{3}}\right)\ldots..$

32) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+2\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+3\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\ldots..$

33) $\left(1+1\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+1\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1+1\right)\left(1-\frac{3}{4}\right)\cdots\cdots$

34) $\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\times$

$\times\left(1+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots$

35) $2^2\left(1-\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{2}{3}\right)2^2\left(1-\frac{3}{5}\right)2^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4}{7}\right)\cdots\cdots$

36) $\left(1+\frac{1}{4}\right)^4\left(1-\frac{1}{9}\right)^9\left(1+\frac{1}{16}\right)^{16}\left(1-\frac{1}{25}\right)^{25}\cdots\cdots$

37) $\left(1+\frac{a^2}{2}\right)^2\left(1-\frac{a^{\frac{3}{2}}}{4}\right)^4\left(1+\frac{a^{\frac{4}{3}}}{8}\right)^8\left(1-\frac{a^{\frac{5}{4}}}{16}\right)^{16}\cdots\cdots$

38) $\left(1+l\,4\right)\left(1-l\sqrt[3]{\frac{6}{2}}\right)^3\left(1+l\sqrt[9]{\frac{8}{3}}\right)^9\left(1-l\sqrt[27]{\frac{10}{4}}\right)^{27}\cdots\cdots$

39) $\left[1-l\left(\frac{a+1}{b+1}\right)\right]\left[1+\frac{1}{2}\,l\left(\frac{2a+1}{2b+1}\right)\right]^2\left[1-\frac{1}{4}\,l\left(\frac{3a+1}{3b+1}\right)\right]^4\times$

$\times\left[1+\frac{1}{8}\,l\left(\frac{4a+1}{4b+1}\right)\right]^8\cdots\cdots$

40) $\left[1-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi+2}{\pi+3}\right)\right]^2\left[1+\frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi+4}{\pi+5}\right)\right]^4\times$

$\times\left[1+\frac{1}{8}\sin\left(\frac{\pi+6}{\pi+7}\right)\right]^8\left[1+\frac{1}{16}\sin\left(\frac{\pi+8}{\pi+9}\right)\right]^{16}\cdots\cdots$

41) $\left(1+\sin 2\right)\left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\sin\frac{3}{2}\right)^2\times$

$\times\left(1+\frac{1}{2}\sin\frac{4}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\sin\frac{4}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\sin\frac{4}{3}\right)^2\times$

$\times\left(1-\frac{1}{2}\sin\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{1}{4}\sin\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{1}{8}\sin\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{1}{16}\sin\frac{5}{4}\right)^2\cdots$

42) $\left(\frac{1-q^2}{1-q}\right)^2\left(\frac{1-q^4}{1-q^3}\right)^2\left(\frac{1-q^6}{1-q^5}\right)^2\left(\frac{1-q^8}{1-q^7}\right)^2\cdots\cdots$

43) $\left(\frac{1+q^2}{1-q}\right)^2 \cdot \left(\frac{1+q^4}{1-q^3}\right)^2 \left(\frac{1+q^6}{1-q^5}\right)^2 \left(\frac{1+q^8}{1-q^7}\right)^2 \ldots\ldots$

44) $\left(\frac{1+q}{1-q}\right)^2 \left(\frac{1+q^3}{1-q^3}\right)^2 \left(\frac{1+q^5}{1-q^5}\right)^2 \left(\frac{1+q^7}{1-q^7}\right)^2 \ldots\ldots$

45) $\left(\frac{1+q^2}{1+q}\right)^2 \left(\frac{1+q^4}{1+q^3}\right)^2 \left(\frac{1+q^6}{1+q^5}\right)^2 \left(\frac{1+q^8}{1+q^7}\right)^2 \ldots\ldots$

46) $\left(\frac{1-q^2}{1+q}\right)^2 \left(\frac{1-q^4}{1+q^3}\right)^2 \left(\frac{1-q^6}{1+q^5}\right)^2 \left(\frac{1-q^8}{1+q^7}\right)^2 \ldots\ldots$

47) $$\frac{1-2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4}{1+2q^2\cos\frac{\pi u}{K}+q^4} \cdot \frac{1-2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8}{1+2q^4\cos\frac{\pi u}{K}+q^8} \cdot$$

$$\cdot \frac{1-2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}}{1+2q^6\cos\frac{\pi u}{K}+q^{12}} \ldots\ldots$$

48) $\left(\frac{m^2-2^2}{a^2+4^2}\right) \left(\frac{m^2-4^2}{a^2+6^2}\right) \left(\frac{m^2-6^2}{a^2+8^2}\right) \left(\frac{m^2-8^2}{a^2+10^2}\right) \ldots\ldots$

49) $$\left[1-\frac{1}{2}\left(1+\frac{x^2}{2}\right)^2\right] \left[1-\frac{1}{3}\left(1+\frac{x^2}{3}\right)^3\right] \times$$

$$\times \left[1-\frac{1}{4}\left(1+\frac{x^2}{4}\right)^4\right] \left[1-\frac{1}{5}\left(1+\frac{x^2}{5}\right)^5\right] \ldots\ldots$$

50) $\left(\frac{2}{4}\cos\frac{x}{2}\right) \left(\frac{3}{5}\cos\frac{x}{3}\right) \left(\frac{4}{6}\cos\frac{x}{4}\right) \left(\frac{5}{7}\cos\frac{x}{5}\right) \ldots\ldots$

51) $$\left(\frac{1+\operatorname{tang} x}{1+\pi\sin x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{tang} x}} \left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{2}}{1+\pi\sin\frac{x}{2}}\right)^{\frac{1}{2\operatorname{tang}\frac{x}{2}}} \times$$

$$\times \left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{3}}{1+\pi\sin\frac{x}{3}}\right)^{\frac{1}{3\operatorname{tang}\frac{x}{3}}} \left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{x}{4}}{1+\pi\sin\frac{x}{4}}\right)^{\frac{1}{4\operatorname{tang}\frac{x}{4}}} \ldots\ldots$$

52) $$\frac{\arcsin\frac{1}{x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+2ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{2x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+8ax^2}}\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{3x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+18ax^2}}\cdot$$

$$\cdot\frac{\arcsin\frac{1}{4x}}{\operatorname{arctang}\frac{ax}{b+32ax^2}}\cdots\cdots$$

53) Folgende Produktenformeln sind abzuleiten:

a) $$\operatorname{tang}\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{m}{n-m}\right)\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right)\cdots\cdot$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{n}{n-m}\right)\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\cdots\cdots$$

b) $$\sec\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{n-m}\cdot\frac{n}{n+m}\cdot\frac{3n}{3n-m}\cdot\frac{3n}{3n+m}\cdot\frac{5n}{5n-m}\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{n}{n-m}\right)\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\cdots\cdots$$

c) $$\operatorname{cosec}\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\cdot\frac{n}{2n-m}\cdot\frac{3n}{2n+m}\cdot\frac{3n}{4n-m}\cdot\frac{5n}{4n+m}\cdots\cdots$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots\cdots$$

d) $$\frac{\pi}{2}=\frac{3}{2}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdot\frac{24}{23}\cdots\cdots$$

e) $$\frac{\pi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{8}{5}\cdot\frac{16}{21}\cdot\frac{40}{33}\cdot\frac{66}{65}\cdot\frac{96}{85}\cdots\cdots$$

f) $$\sqrt{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{14}{15}\cdot\frac{16}{15}\cdots\cdots$$

g) $$\sqrt{3}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\cdots\cdots$$

54) Es ist

$$\sqrt[r]{a}=P_0\,P_1\,P_2\,P_3\cdots\cdots P_n\cdots\cdots$$

$$\text{für } P_n = \frac{(na+1)r+1}{(na+1)r} \cdot \frac{(na+2)r+1}{(na+2)r} \cdots \frac{((n+1)a-1)r+1}{((n+1)a+1)r} \cdot$$
$$\cdot \frac{(n+1)ar+1}{(n+1)ar+a};$$

der Fehler, welchen man begeht, wenn man von dem unendlichen Produkte blos die ersten $n+1$ Faktoren beibehält, beträgt weniger als

$$P_0\, P_1\, P_2 \ldots\ldots P_n \frac{a-1}{(n+1)r+1}$$

55) Man bestimme für folgende unendliche Produkte sowohl das Produkt der n ersten Faktoren als auch den Grenzwerth dieses Produktes.

a) $\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2^2} \cdot \cos\frac{x}{2^3} \cdot \cos\frac{x}{2^4} \ldots\ldots$

b) $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdots$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot$
$\cdot \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} \ldots\ldots$

d) $\dfrac{\operatorname{tang}\frac{x}{4}}{\operatorname{tang}\frac{x}{2} - \operatorname{tang}\frac{x}{4}} \cdot \dfrac{\operatorname{tang}\frac{x}{8}}{\operatorname{tang}\frac{x}{4} - \operatorname{tang}\frac{x}{8}} \cdot \dfrac{\operatorname{tang}\frac{x}{16}}{\operatorname{tang}\frac{4}{8} - \operatorname{tang}\frac{x}{16}} \cdot$

$\cdot \dfrac{\operatorname{tang}\frac{x}{32}}{\operatorname{tang}\frac{x}{16} - \operatorname{tang}\frac{x}{32}} \ldots\ldots$

e) $\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3}\right)\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^2}\right)\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^3}\right)\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{x}{3^4}\right)\ldots$

f) $\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{x}{9}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{9}\right)\ldots\ldots$

g) $\left(4-3\cos\frac{x}{3}\right)\left(4-3\cos\frac{x}{3^2}\right)\left(4-3\cos\frac{x}{3^3}\right)\left(4-3\cos\frac{x}{3^4}\right)\ldots\ldots$

h) $\left(1-4\sin^2\frac{x}{4}\right)\left(1-4\sin^2\frac{x}{8}\right)\left(1-4\sin^2\frac{x}{16}\right)\left(1-4\sin^2\frac{x}{32}\right)\ldots$

56) Folgende unendliche Produkte sind in Reihen zu verwandeln:

$$a)\ \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdots\cdots$$

$$b)\ \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots$$

$$c)\ \left(1+\frac{1}{u_1}\right)\left(1-\frac{1}{u_2}\right)\left(1+\frac{1}{u_3}\right)\left(1-\frac{1}{u_4}\right)\cdots\cdots \text{ wenn}$$

$$u_n = 2^{n+1} - u_{n-1} \text{ und } u_1 = 2$$

$$d)\ \left(1-\frac{m^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{2^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{3^2}\right)\left(1-\frac{m^2}{4^2}\right)\cdots\cdots$$

$$e)\ \left(\frac{3}{4-x^2}\right)\left(\frac{15}{16-x^2}\right)\left(\frac{35}{36-x^2}\right)\left(\frac{63}{64-x^2}\right)\cdots\cdots$$

$$f)\ \left(\frac{1^2}{1-x^2}\right)\left(\frac{3^2}{3^2-x^2}\right)\left(\frac{5^2}{5^2-x^2}\right)\left(\frac{7^2}{7^2-x^2}\right)\cdots\cdots$$

$$g)\ (1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\cdots\cdots$$

$$h)\ (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots\cdots$$

57) Man zeige, dass das unendliche Produkt

$$\left(1+\frac{z}{1-z}\right)\left(1+\frac{rz}{1-rz}\right)\left(1+\frac{r^2z}{1-r^2z}\right)\left(1+\frac{r^3z}{1-r^3z}\right)\cdots\cdots$$

sich in die Reihe

$$1+\frac{z}{1-r}+\frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)}+\frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}+\cdots\cdots$$

verwandeln lässt, und beweise mit Hilfe dieser Beziehung folgende von **Gauss** aufgestellte Theoreme:

a) Die Summe der Reihe

$$1-\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}-\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

ist entweder Null oder

$$(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots\cdots(1-q^{n-1})$$

jenachdem n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

b) Unter der Voraussetzung, dass n eine positive und ganze Zahl ist, hat man

$$1+\frac{(1-q^n)}{1-q}\cdot q^{\frac{1}{2}}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}q^{\frac{2}{2}}+$$
$$+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}q^{\frac{3}{2}}+\ldots\ldots$$
$$=\left(1+q^{\frac{1}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{2}{2}}\right)\left(1+q^{\frac{3}{2}}\right)\ldots\ldots\left(1+q^{\frac{n}{2}}\right)$$

58) Man verwandle:

a) $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)\ldots\ldots$

b) $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}\ldots\ldots$

c) $(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\ldots\ldots$

d) $(1+x^{a_1}z)(1+x^{a_2}z)(1+x^{a_3}z)(1+x^{a_4}z)(1+x^{a_5}z)\ldots\ldots$

e) $\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\ldots\ldots}$

f) $\frac{1}{(1-x^{a_1}z)(1-x^{a_2}z)(1-x^{a_3}z)(1-x^{a_4}z)(1-x^{a_5}z)\ldots\ldots}$

in Reihen, welche für *a*) und *b*) nach den steigenden Potenzen von x und für *c*) *d*) *e*) und *f*) nach den steigenden Potenzen von z fortschreiten. — Aus den Gesetzen, nach welchen die in diesen Reihen auftretenden Coefficienten gebildet sind, lassen sich mehrere Eigenschaften der ganzen Zahlen in Betreff der verschiedenen möglichen Arten ihrer Entstehung durch Addition ableiten; wie lauten diese?

59) Man verwandle die Ausdrücke

$$P_1,\ P_2,\ \frac{1}{P_1},\ \frac{1}{P_2},\ \frac{P_2}{P_1},\ \frac{P_1}{P_2},$$

in welchen

$$P_1=\Pi\left(1-\frac{1}{m^n}\right)$$
$$P_2=\Pi\left(1-\frac{1}{m^{2n}}\right)$$

ist, (für m alle möglichen Primzahlen, mit 2 beginnend, gesetzt) in Reihen, und beweise die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$a)\ \frac{\pi^2}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdots\cdots$$

$$b)\ \frac{\pi^2}{15} = \frac{2^2}{2^2+1} \cdot \frac{3^2}{3^2+1} \cdot \frac{5^2}{5^2+1} \cdot \frac{7^2}{7^2+1} \cdot \frac{11^2}{11^2+1} \cdots\cdots$$

$$c)\ \frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdots\cdots$$

$$d)\ \frac{\pi^4}{105} = \frac{2^4}{2^4+1} \cdot \frac{3^4}{3^4+1} \cdot \frac{5^4}{5^4+1} \cdot \frac{7^4}{7^4+1} \cdot \frac{11^4}{11^4+1} \cdots\cdots$$

$$e)\ \frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8-1} \cdot \frac{3^8}{3^8-1} \cdot \frac{5^8}{5^8-1} \cdot \frac{7^8}{7^8-1} \cdot \frac{11^8}{11^8-1} \cdots\cdots$$

60) Aus der Wallis'schen Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdots\cdots$$

sind mit Benützung der Eigenschaften der Differenzenreihen folgende Reihen, in welchen a und b beliebige Constanten bedeuten, abzuleiten.

$$1)\ \frac{3a-4b}{12} \cdot \pi = \frac{6a-13b}{9} + \left(\frac{1}{3}\right) b + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}\right)(b+a) +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7}\right)(b+2a) +$$
$$+ \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{6}{9}\right)(b+3a) + \cdots\cdots$$

$$2)\ (4b+a) \cdot \frac{1}{\pi} = b + \left(\frac{1}{2}\right)^2 (b+a) + \left(\frac{1.1}{2.4}\right)^2 (b+2a) +$$
$$+ \left(\frac{1.1.3}{2.4.6}\right)^2 (b+3a) + \left(\frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}\right)^2 (b+4a) + \cdots\cdots$$

61) Folgende Reihen sind in Produkte zu verwandeln:

$$a)\ 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \cdots\cdots$$

$$b)\ 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \cdots\cdots$$

$$c)\ 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \cdots\cdots$$

62) Es sei

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)} x +$$

$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} x^2 + \ldots\ldots;$$

man zeige, dass

$$\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \frac{1-q^\alpha x}{1-x} \varphi(\alpha, \beta, \beta, q, qx) \text{ ist,}$$

und benütze diese Relation, um die Funktion $\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x)$ in ein unendliches Produkt zu verwandeln. Man gebe ferner die Produkte an, welche den speciellen Fällen

$$\varphi(-m, \beta, \beta, -q^m x),$$
$$\varphi(-\infty, \beta, \beta, q, -q^\infty x) \text{ und}$$
$$\varphi(\infty, \beta, \beta, q, -x)$$

entsprechen.

63) Es ist unter der in der vorigen Aufgabe gemachten Voraussetzung folgende Gleichung zu beweisen:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \prod_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1-q^{\gamma+n-\alpha}}{1-q^{\gamma+n-\alpha-\beta}}\right]\prod_{n=0}^{n=\infty}\left[\frac{1-q^{\gamma+n-\beta}}{1-q^{\gamma+n}}\right]$$

64) Bezeichnet man die Summe der als convergent vorausgesetzten hypergeometrischen Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3\quad\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)} x^3 + \ldots$$

durch $F(\alpha, \beta, x)$ und das unendliche Produkt

$$\prod_1^\infty \left(\frac{n}{n+a}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

durch $\psi(a)$, so ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\psi(\gamma-1)\,\psi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\psi(\gamma-\alpha-1)\,\psi(\gamma-\beta-1)}$$

65) Man leite folgende specielle Fälle aus der in der vorigen Aufgabe angegebenen allgemeinen Formel ab:

$$a)\ \frac{\pi}{2} = \frac{\psi\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\psi(0)\,\psi(0)} = \prod_{1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1}$$

$$b)\ \sin\frac{m\pi}{2} = \frac{m\,\psi\left(\frac{1}{2}\right)\psi\left(-\frac{1}{2}\right)}{\psi\left(-\frac{m}{2}\right)\psi\left(\frac{m}{2}\right)}$$

und aus *b*) die bekannte Produktenformel für sin x.

IX. Ueber die Funktionen complexer Variablen, und über complexe Reihen und Produkte.

1) Der Ausdruck

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} = \sqrt[n]{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt[n]{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

erscheint für $b^2 > a^2$ in imaginärer Form, besitzt aber gleichwohl, unter der Voraussetzung, dass die Wurzelgrössen im allgemeineren Sinne aufgefasst werden, und das Produkt $\sqrt[n]{A} \cdot \sqrt[n]{B}$ reell sein soll, n reelle Werthe; man bestimme dieselben.

2) Welche reelle Werthe besitzt der Ausdruck

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, l \cdot \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}},$$

der für $b^2 > a^2$ eine imaginäre Form annimmt?

3) Der Ausdruck

$$\sqrt{a} \cdot \operatorname{arctang} \sqrt{a x^2 - b^2}$$

wird für negative Werthe von a scheinbar imaginär; man bestimme seinen reellen Werth.

Man bestimme ferner die reellen Werthe folgender Ausdrücke:

4) $\dfrac{\arccos x}{\sqrt{1 - x^2}}$, für $x > +1$

5) $\dfrac{\arccos \sqrt{1-x}}{\sin \sqrt{x}}$, für $x < 0$

6) $\dfrac{\arcsin (1+x) - \arcsin (1+2x)}{\arcsin (1+x) + \arcsin (1+2x)}$, für $x > 0$

7) $l\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{a-\sqrt{a^2-x^2}}\right) \operatorname{arctang} \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, für $x^2 > a^2$

8) $\dfrac{\operatorname{arctang} \sqrt{x^2-5x+6}}{\arccos (x-1)}$, für $+2 < x < +3$

9) $\dfrac{l\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-12}\right) - \arccos (4-x)}{\sqrt{(x-3)(x+4)}}$, für $-4 < x < +3$

10) **Man löse die auf pag. 10 angegebenen Aufgaben No. 4) 5) 6) und 12), wenn a als eine complexe, und $\frac{1}{\delta}$ als eine positive, ganze, ins Unendliche wachsende Zahl vorausgesetzt wird.**

11) Es seien a, b und c complexe Grössen und $\frac{1}{\delta}$ eine positive ganze Zahl, welche unendlich gross wird; man bestimme unter dieser Voraussetzung die Grenzwerthe der in No. 23) 25) und 26) pag. 11 angegebenen Ausdrücke.

12) Folgende Sätze lassen sich mit Zuhilfenahme von complexen Grössen leicht beweisen.

a) Das Produkt zweier Faktoren, von welchen jeder eine Summe zweier Quadrate ist, lässt sich als eine Summe zweier Quadrate darstellen.

b) Das Produkt zweier Ausdrücke von der Form $a^2 + n b^2$ ist ein Ausdruck von derselben Form.

c) Das Produkt zweier Summen von vier Quadraten lässt sich als eine Summe von vier Quadraten darstellen.

13) Wenn e die Basis der natürlichen Logarithmen und n eine positive oder negative ganze Zahl bedeutet, so ist

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{1+2n\pi i} = e,$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi i)^2} = e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = \left(e^{1+2n\pi i}\right)^{(1+2n\pi i)} = e^{1+2n\pi i} = e.$$

Da aber $e^{1+4n\pi i}$ ebenfalls gleich e ist, so würde hieraus das absurde Resultat $e^{-4n^2\pi^2} = 1$ folgen. Es ist nun nachzuweisen, wo in der Herleitung dieses Resultates gefehlt wurde.

14) Die Funktion

$$y = l \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

lässt sich in eine nach den steigenden Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln von der Form

$$a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + \ldots\ldots ;$$

und umgekehrt ist

$$x = a_1 y - a_3 y^3 + a_5 y^5 - a_7 y^7 + \ldots\ldots$$

Man beweise diesen Satz, indem man von der goniometrischen Funktion zu Exponentialgrössen übergeht.

15) Bezeichnet man mit S_1 die Summe aller Binomialcoefficienten, welche in der Form $(m)_{4n+1}$ enthalten sind, und mit S_2, S_3, S_4 die Summen jener Coefficienten, welche beziehungsweise die Form $(m)_{4n+2}$, $(m)_{4n+3}$, $(m)_{4n}$ besitzen, so ist zu zeigen, dass

$$S_1 = \frac{2^m + (1+i)^m - (1-i)^m}{4}.$$

$$S_2 = \frac{2^m - (1+i)^m - (1-i)^m}{4}$$

$$S_3 = \frac{2^m i - (1+i)^m + (1-i)^m}{4i}$$

$$S_4 = \frac{2^m i + (1+i)^m + (1-i)^m}{4i}$$

Diese in imaginärer Form erscheinenden Ausdrücke sind ihrer Wesenheit nach reell, und es sind daher dieselben in Ausdrücke reeller Form zu transformiren.

16) Man bestimme die Summen folgender Ausdrücke

$$\begin{array}{llllll}
a) & (m)_0 & + (m)_p & + (m)_{2p} & + (m)_{3p} & + \ldots\ldots = S_0 \\
b) & (m)_1 & + (m)_{p+1} & + (m)_{2p+1} & + (m)_{3p+1} & + \ldots\ldots = S_1 \\
c) & (m)_2 & + (m)_{p+2} & + (m)_{2p+2} & + (m)_{3p+2} & + \ldots\ldots = S_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
d) & (m)_{p-1} & + (m)_{2p-1} & + (m)_{3p-1} & + (m)_{4p-1} & + \ldots\ldots = S_{p-1}
\end{array}$$

mit Benützung der Relation

$(1 + \theta^m = S_0 + S_1 \theta + S_2 \theta^2 + \ldots\ldots + S_{p-1} \theta^{p-1}$,

in welcher θ eine der p Wurzeln der Gleichung $\theta^p - 1 = 0$ bedeutet.

17) Als speciellen Fall der vorhergehenden Aufgabe bestimme man die Summen aller jener Binomialcoefficienten, welche beziehungsweise in der Form

$$(m)_{3n+1}\,,\ (m)_{3n+2}\,,\ (m)_{3n}$$

enthalten sind, und stelle die einfachen Relationen auf, welche zwischen diesen Summen bestehen, wenn m einen der Werthe $6n$, $6n+1$, $6n+2$, $6n+3$, $6n+4$, $6n+5$ besitzt.

18) Es sei

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots\ldots$$

bekannt; man bestimme die Summen

$$S_0\,,\ S_1\,,\ S_2\,,\ S_3\,,\ \ldots\ldots\ S_{p-1}$$

der Reihen

$$\begin{array}{llll}
A_0 & + A_p\, x^p & + A_{2p}\, x^{2p} & + A_{3p}\, x^{3p} + \ldots\ldots, \\
A_1 & + A_{p+1}\, x^{p+1} & + A_{2p+1}\, x^{2p+1} & + A_{3p+1}\, x^{3p+1} + \ldots\ldots, \\
\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots & \quad\vdots \\
A_{p-1} & + A_{2p-1}\, x^{2p-1} & + A_{3p-1}\, x^{3p-1} & + A_{4p-1}\, x^{4p-1} + \ldots\ldots,
\end{array}$$

mit Benützung der Gleichung

$f(\theta_r x) = S_0 + S_1 \theta_r + S_2 \theta_r^2 + \ldots\ldots + S_{p-1} \theta_r^{n-1}$

in welcher θ_r eine der p Wurzeln der positiven Einheit bezeichnet.

19) Als specielle Fälle der vorhergehenden Aufgabe behandle man die Potenzenreihen für e^x, $l(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$ und $\operatorname{arctang} x$.

20) Ausgehend von der leicht zu beweisenden Reihenentwicklung:

$$\frac{x}{4}(3x-2) - \frac{1}{2}(1-x)^2\, l(1-x) = \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \frac{x^5}{3.4.5} + \ldots$$

leite man mit Benützung der in der Aufgabe No. 18 gewonnenen Resultate folgende Reihen ab:

$$a)\ \frac{1}{4}\, l\, 2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \ldots\ldots$$

b) $\frac{3}{4} l 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{11.12.13} + \cdots\cdots$

c) $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} l 2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{10.11.12} + \cdots\cdots$

d) $\frac{3}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} l 2 = \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{8.9.10} + \frac{1}{12.13.14} + \cdots\cdots$

e) $\frac{1}{2} l 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{8.9.10} + \cdots\cdots$

f) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12} - \frac{1}{4} l 3 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \cdots\cdots$

g) $\frac{3}{4} - \frac{l3}{4} - \frac{\pi\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{6.7.8} + \frac{1}{9.10.11} + \cdots\cdots$

h) $$\frac{5 \operatorname{arctang} \frac{\sqrt{3}}{5}}{8\sqrt{3}} - \frac{11}{48} l 7 + \frac{1}{2} l 2 = \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{4.5.6} \cdot \frac{1}{8^2} + \frac{1}{7.8.9} \cdot \frac{1}{8^3} + \cdots\cdots$$

21) Es seien $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{n-1}$ beliebige Grössen; man bestimme a_n so, dass folgende Gleichung stattfindet:

$$l\left(\frac{a_1+i}{a_1-i}\right) = l\left(\frac{a_2+i}{a_2-i}\right) + l\left(\frac{a_3+i}{a_3-i}\right) \cdots\cdots + l\left(\frac{a_{n-1}+i}{a_{n-1}-i}\right) + l\left(\frac{a_n+i}{a_n-i}\right).$$

Welche Werthe hat man den Grössen a_1, a_2 etc. beizulegen, um folgende Gleichungen zu erhalten, welche mit Vortheil zur Berechnung der natürlichen Logarithmen der Zahlen 2, 3, 5 und 7 benützt werden können?

$$\begin{aligned} l2 = & \; 6\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\right) + \\ & + 2\left(\frac{1}{84} + \frac{1}{3.84^3} + \frac{1}{5.84^5} + \cdots\right) - \\ & - 2\left(\frac{1}{21249} + \frac{1}{3.21249^3} + \frac{1}{5.21249^5} + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l3 = & \; 10\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3.9^3} + \frac{1}{5.9^5} + \cdots\right) + \\ & + 2\left(\frac{1}{117} + \frac{1}{3.117^3} + \frac{1}{5.117^5} + \cdots\right) - \\ & - 2\left(\frac{1}{181249} + \frac{1}{3.181249^3} + \frac{1}{5.181249^5} + \cdots\right) \end{aligned}$$

$$l2 + 2l3 - 3l5 + l7 = 2\left(\frac{1}{251} + \frac{1}{3.251^3} + \frac{1}{5.251^5} + \ldots\right)$$

$$5l2 - 2l3 - 2l5 + l7 = -2\left(\frac{1}{449} + \frac{1}{3.449^3} + \frac{1}{5.449^5} + \ldots\right)$$

$$5l2 + l3 + 2l5 - 4l7 = -2\left(\frac{1}{4801} + \frac{1}{3.4801^3} + \frac{1}{5.4801^5} + \ldots\right)$$

$$l2 + 7l3 - 4l5 - l7 = -2\left(\frac{1}{8749} + \frac{1}{3.8749^3} + \frac{1}{5.8749^5} + \ldots\right)$$

22) Folgende Ausdrücke, welche sämmtlich der Ludolph'schen Zahl π gleich sind, sollen abgeleitet werden:

a) $\frac{2}{i}\, l\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ *b*) $\frac{2}{i}\, l\frac{(2+i)(3+i)}{(2-i)(3-i)}$

c) $\frac{2}{i}\, l\frac{(5+i)^4(-239+i)}{(5-i)^4(-239+i)}$

d) $\frac{2}{i}\, l\frac{(10+i)^8(-515+i)^4(-239+i)}{(10-i)^8(-515-i)^4(-239-i)}$

e) $\frac{2}{i}\, l\frac{(3+i)^2(7+i)}{(3-i)^2(7-i)}$ *f*) $\frac{2}{i}\, l\frac{(5+i)^2(7+i)(8+i)^2}{(5-i)^2(7-i)(8-i)^2}$

g) $\frac{2}{i}\, l\frac{(7+i)^3(8+i)^2(18+i)^2}{(7-i)^3(8-i)^2(18-i)^2}$ *h*) $\frac{2}{i}\, l\frac{(8+i)^5(18+i)^2(57+i)^3}{(8-i)^5(18-i)^2(57-i)^3}$

i) $\frac{2}{i}\, l\frac{(13+i)^5(21+i)^5(31+i)^2(43+i)^2(57+i)^3}{(13-i)^5(21-i)^5(31-i)^2(43-i)^2(57-i)^3}$

Entwickelt man diese Ausdrücke in Reihen, so erhält man aus *a*) die von Leibnitz aufgestellte Reihe, aus *b*) die Euler'sche Doppelreihe, aus *c*) die von Machin zur Berechnung von π auf 100 Dezimalstellen benützte Reihe, aus *d*) die von Buzengeiger angegebene und aus *e*) die von Vega angewendete Reihe, um π auf 126 Dezimalstellen zu berechnen.

23) Es sei:

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)\;(1-q^\gamma)}\, x +$$

$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)\;(1-q^2)\;\;(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma-1})}\, x^2 + \ldots,$$

g eine ins Unendliche wachsende Zahl und $z = e^{2xi}$; man bestimme zunächst:

$$\psi\;(z) = \varphi\,(-g,\ 1,\ g,\ q^2,\ z\,q^{2g+1})$$

$$\psi_1\,(z) = \sqrt{z}\,\varphi\,(-g,\ 1,\ g,\ q^2,\ z\,g^{2g+2})$$

$$\psi_2\,(z) = \varphi\left(1,\ \frac{\pi i}{lq},\ 1 + \frac{\pi i}{lq},\ q,\ q\,z\right)$$

$$\psi_3\,(z) = \varphi\left(1,\ \frac{\pi i}{\pi i + lq},\ 1 + \frac{\pi i}{\pi i + lq},\ -q,\ q\,z\right)$$

$$\psi_4\,(z) = z\,\varphi\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ q^4,\ q^2 z\right)$$

$$\psi_5\,(z) = \sqrt{z}\,\varphi\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ q^2,\ -q^2 z\right)$$

$$\psi_6\,(z) = \sqrt{z}\,\varphi\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ q^2,\ -q\,z\right)$$

$$\psi_7\,(z) = \varphi\left(\frac{\pi i}{2lq},\ 1,\ 1 + \frac{\pi i}{2lq},\ q^2,\ q\,z\right)$$

und ferner:

$$\psi\,(z) + \psi\left(\frac{1}{z}\right)$$

$$\sqrt[4]{q}\left[\psi_1\,(z) - \psi_1\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\cot x + i\left[\psi_2\,(z) - \psi_2\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\operatorname{tang} x - i\left[\psi_3\,(z) - \psi_3\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\frac{4q}{(1-q^2)}\left[\psi_4\,(z) - \psi_4\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\frac{1}{\cos x} + \frac{2q}{1-q}\left[\psi_5\,(z) + \psi_5\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\frac{2\sqrt{q}}{1-q}\left[\psi_6\,(z) + \psi_6\left(\frac{1}{z}\right)\right]$$

$$\psi_7\,(z) + \psi_7\left(\frac{1}{z}\right)$$

Folgende Reihen sind zu summiren:

24)
$$\left\{\begin{array}{l} \sum_1^\infty n\,x^{n-1} \cos (n-1)\,\varphi \\ \sum_1^\infty (n+1)\,x^n \sin n\,\varphi \end{array}\right.$$

$$25)\ \left\{\begin{array}{l} \sum_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \cdot x^n \cos n\varphi \\ \sum_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \cdot x^n \sin n\varphi \end{array}\right.$$

$$26)\ \left\{\begin{array}{l} \sum_0^\infty \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^n \cos n\varphi \\ \sum_1^\infty \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^n \sin n\varphi \end{array}\right.$$

$$27)\ \left\{\begin{array}{l} \sum_1^\infty \left[x^{n-1}\cos(n-1)\varphi + x^n \cos n\varphi + \ldots + x^{2n-2}\cos(2n-2)\varphi\right] \\ \sum_1^\infty \left[x^{n-1}\sin(n-1)\varphi + x^n \sin n\varphi + \ldots + x^{2n-2}\sin(2n-2)\varphi\right] \end{array}\right.$$

$$28)\ \left\{\begin{array}{l} x\cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^3\cos 3\varphi + \\ + \frac{1}{4}\cdot\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^4\cos 4\varphi + \ldots\ldots \\ x\sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\cdot\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^3\sin 3\varphi + \\ + \frac{1}{4}\cdot\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^4\sin 4\varphi + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$29)\ \left\{\begin{array}{l} x\cos\varphi + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2\cos 2\varphi + \frac{1}{2 \cdot 3}\cdot\frac{1}{2}x^3\cos 3\varphi + \\ + \frac{1}{3 \cdot 4}\cdot\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4\cos 4\varphi + \ldots\ldots \\ x\sin\varphi + \frac{1}{1 \cdot 2}x^2\sin 2\varphi + \frac{1}{2 \cdot 3}\cdot\frac{1}{2}x^3\sin 3\varphi + \\ + \frac{1}{3 \cdot 4}\cdot\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^4\sin 4\varphi + \ldots\ldots \end{array}\right.$$

$$30)\ \left\{\begin{array}{l} \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\cos n\varphi \\ \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\sin n\varphi \end{array}\right. \qquad 31)\ \left\{\begin{array}{l} \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cos(2n+1)\varphi \\ \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\sin(2n+1)\varphi \end{array}\right.$$

$$32)\ \left\{\begin{array}{l} \sum_0^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\cos(2n+1)\varphi \\ \sum_0^\infty (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\sin(2n+1)\varphi \end{array}\right.$$

$$33)\quad \begin{cases} \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \cos^2 n\varphi \\ \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} \sin^2 n\varphi \end{cases} \qquad 34)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cos^2 (2n+1)\varphi \\ \sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \sin^2 (2n+1)\varphi \end{cases}$$

$$35)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cos^2 (2n+1)\varphi \\ \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \sin^2 (2n+1)\varphi \end{cases}$$

$$36)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \cos 2n\varphi \\ \sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} \sin 2n\varphi \end{cases}$$

$$37)\quad \begin{cases} \sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cos (2n+1)\varphi \\ \sum_1^\infty (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \sin (2n+1)\varphi \end{cases}$$

$$38)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)_n \cdot \frac{x^{2n+1} \cos (2n+1)\varphi}{2n+1} \\ \sum_0^\infty (-1)^n \left(-\frac{1}{2}\right)_n \cdot \frac{x^{2n+1} \sin (2n+1)\varphi}{2n+1} \end{cases}$$

$$39)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty T_{2n+1}\, x^{2n+1} \cos (2n+1)\varphi \\ \sum_0^\infty T_{2n+1}\, x^{2n+1} \sin (2n+1)\varphi \end{cases}$$

(T_{2n+1} bezeichnet den Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Tangentenreihe.)

$$40)\quad \begin{cases} \sum_0^\infty S_{2n}\, x^{2n} \cos 2n\varphi \\ \sum_1^\infty S_{2n}\, x^{2n} \sin 2n\varphi \end{cases}$$

(S_{2n} bezeichnet den Coefficienten des allgemeinen Gliedes der Secantenreihe.)

$$41)\quad \begin{cases} \sum_1^\infty \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots \mp \frac{1}{n}\right) x^n \cos n\varphi \\ \sum_1^\infty \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots\ldots \mp \frac{1}{n}\right) x^n \sin n\varphi \end{cases}$$

$$42)\begin{cases} x\cos\varphi + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{2.4.6\ldots.\ 2n}{3.5.7\ldots.(2n+1)}\, x^{2n+1}\cos(2n+1)\varphi \\ x\sin\varphi + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{2.4.6\ldots.\ 2n}{3.5.7\ldots.(2n+1)}\, x^{2n+1}\sin(2n+1)\varphi \end{cases}$$

$$43)\begin{cases} \frac{\cos(a\alpha)}{r^a} + \frac{\cos(a+b)\alpha}{r^{a+b}} + \frac{\cos(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}} + \frac{\cos(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}} + \ldots \\ \frac{\sin(a\alpha)}{r^a} + \frac{\sin(a+b)\alpha}{r^{a+b}} + \frac{\sin(a+2b)\alpha}{r^{a+2b}} + \frac{\sin(a+3b)\alpha}{r^{a+3b}} + \ldots \end{cases}$$

$$44)\begin{cases} x^{2n+1}\cos(2n+1)\varphi + \\ + \sum_{p=1} \frac{C_p^{[2(n+p)-1]^2}}{(2n+2)\ldots.(2n+2p+1)} \cdot x^{2n+2p+1}\cos(2n+2p+1)\varphi \\ x^{2n+1}\sin(2n+1)\varphi + \\ + \sum_{p=1} \frac{C_p^{[2(n+p)-1]^2}}{(2n+2)\ldots.(2n+2p+1)} \cdot x^{2n+2p+1}\sin(2n+2p+1)\varphi \end{cases}$$

($C_p^{[2(n+p)-1]^2}$ bezeichnet die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen aus den Elementen $1^2, 3^2 \ldots. [2(n+p)-1]^2$ in der p^{ten} Klasse, wobei jede Complexion als Produkt gilt.)

$$45)\begin{cases} x^{2n}\cos 2n\varphi + \sum_{p=1} \frac{C_p^{2^2(n+p-1)^2}}{(2n+1)\ldots.(2n+2p)}\, x^{n2+2p}\cos(2n+2p)\varphi \\ x^{2n}\sin 2n\varphi + \sum_{p=1} \frac{C_p^{2^2(n+p-1)^2}}{(2n+1)\ldots.(2n+2p)}\, x^{2n+2p}\sin(2n+2p)\varphi \end{cases}$$

($C_p^{2^2(n+p-1)^2}$ bezeichnet die Summe der Combinationen ohne Wiederholungen zur p^{ten} Klasse aus den Elementen $2^2,\ 4^2 \ldots.\ 2^2(n+p-1)^2$, wobei jede Complexion als Produkt gilt.)

46) Wenn für die complexe Reihe

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots..$$

die Reihe der Moduli convergirt, so convergirt auch die Reihe

$$\alpha_0 u_0 + \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \ldots..,$$

wo α_0, α_1, α_2 ..... willkürliche endliche reelle oder complexe Grössen bedeuten, deren Moduli nicht ins Unendliche wachsen.

47) Eine Reihe ist unbedingt convergent, wenn die Moduli ihrer Glieder eine convergente Reihe bilden.

48) Wenn man in der Doppelreihe

$$\begin{array}{l} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots \\ + a_0' + a_1' x + a_2' x^2 + \ldots\ldots \\ + a_0'' + a_1'' x + a_2'' x^2 + \ldots\ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

die Coefficienten der Horizontalreihen durch ihre Moduli ersetzt, und die Summen der so erhaltenen Reihen für einen positiven Werth x_0 eine convergente Reihe bilden, dann convergirt die Doppelreihe für alle Werthe von x, deren Moduli nicht grösser sind als x_0.

Folgende Funktionen sind in unendliche Produkte zu verwandeln:

49) $\frac{e^x - 2\cos\varphi + e^{-x}}{2(1 - \cos\varphi)}$

50) $\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c}$

51) $\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c}$

52) $\frac{e^x + e^{-x} + e^b + e^{-b}}{2 + e^b + e^{-b}}$

53) $\frac{e^x - e^{-x} + e^b - e^{-b}}{e^b - e^{-b}}$

54) $\frac{e^b - e^{-b} - e^x + e^{-x}}{e^b - e^{-b}}$

55) $\frac{e^x + e^{-x} - e^c - e^{-c}}{2 - e^b - e^{-b}}$

56) $\frac{\cos x + \cos\varphi}{1 + \cos\varphi}$

57) $\frac{\cos x - \cos\varphi}{1 - \cos\varphi}$

58) $\frac{\sin x + \sin\varphi}{\sin\varphi}$

59) $\cos x + \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \cdot \sin x$

60) $\cos x - \cot\frac{\varphi}{2} \cdot \sin x$

61) $\frac{\cos\frac{1}{2}(\varphi - x)}{\cos\frac{\varphi}{2}}$

62) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi - x)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

63) $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + x)}{\sin\frac{\varphi}{2}}$

64) Folgende Gleichungen sind zu beweisen:

$$a)\ \frac{1}{2}\left(e^{\frac{z-q}{2p}\cdot\pi i} + e^{\frac{q-z}{2p}\cdot\pi i}\right) = \Pi\left(1 + \frac{q}{pm}\right)\Pi\left(1 - \frac{z}{pm+q}\right)$$

$$b)\ \Pi\left\{\frac{1+(h^2+h^{-2})\,k^m+k^{2m}}{(1+k^m)^2}\right\}=\Pi\left\{\frac{1+(h_1{}^2+h_1{}^{-2})\,k_1{}^m+k_1{}^{2m}}{(1+k_1{}^m)^2}\right\}$$

$$c)\ A\,(h-h^{-1})\,\Pi\left\{\frac{1+(h^2+h^{-2})\,k^n+k^{2n}}{(1-k^n)^2}\right\}=$$

$$=A'\,(h_1-h_1{}^{-1})\,\Pi\left\{\frac{1-(h_1{}^2+h_1{}^{-2})\,k_1{}^n+k_1{}^{2n}}{(1-k_1{}^n)^2}\right\}$$

$$d)\ \Pi\left\{\frac{1-(h^2+h^{-2})\,k^m+k^{2m}}{(1-k^m)^2}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\,(h_1+h_1{}^{-1})\,\Pi\left\{\frac{1+(h_1{}^2+h_1{}^{-2})\,k_1{}^n+k_1{}^{2n}}{(1+k_1{}^n)^2}\right\}$$

Hiebei bezeichnen A und A′ beliebige Grössen, ferner ist $h=e^{\frac{z\pi i}{2A}}$, $h_1=e^{\frac{z\pi i}{2A'}}$, $k=e^{\frac{A'\pi i}{A}}$ und $k_1=e^{\frac{A\pi i}{A'}}$. Für m hat man in der ersten Gleichung alle positiven und negativen, in den übrigen Gleichungen blos alle positiven ungeraden Zahlen und für n alle positiven geraden Zahlen — ausschliesslich der Null — zu setzen.

65) Wenn $\varphi\,(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$ die in der Aufgabe No. 23 dieses Capitels angegebene Bedeutung besitzt, und

$$S=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha})\,(1-q^{\alpha+1})\ldots.(1-q^{\alpha+n-1})\,(1-q^{\beta}x)\,(1-q^{\beta+1}.x)\ldots}{(1-q)\ \ (1-q^2)\ \ \ldots(1-q^n)\ \ \ \ (1-q^{\gamma}x)\,(1-q^{\gamma+1}.x)\ldots.}$$
$$\frac{(1-q^{\beta+n-1}.x)\,z^n}{(1-q^{\gamma+n-1}x)}$$

gesetzt wird, so ergibt sich aus der Entwicklung des Produktes $S\,.\,\varphi\,(\gamma-\beta,1,1,q,xq^{\beta})$ unter Benützung der in der Aufgabe No. 62 des vorigen Capitels geforderten Produktenformel folgende Relation:

$$a)\ \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\gamma+n}.x)}{(1-q^{\beta+n}.x)}\,S=$$

$$=\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+n}z)}{(1-q^n z)}\left\{1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma+n-1-\beta}).(1-z)\,(1-qz)\ldots.}{(1-q)\ \ \ \ldots.(1-q^n)\ \ (1-q^{\alpha}z)\ (1-q^{\alpha+1}z)\ldots.}\right.$$
$$\left.\frac{(1-q^{n-1}z)}{(1-q^{\alpha+n-1}z)}\cdot q^{n\beta}x^n\right\}$$

aus welcher man durch Substitution gewisser Werthe für x und z leicht die Gleichungen

$$b)\ \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\gamma+n})}{(1-q^{\beta+n})}\,\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{r}) =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha+r+n})}{(1-q^{r+n})}\,\varphi(\gamma-\beta, r, \alpha+r, q, q^{\beta})$$

$$c)\ \varphi(\alpha,\beta,\gamma,q^{\gamma-\alpha-\beta}) =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\beta+n})}{(1-q^{\gamma+n})}\cdot\prod_{n=0}^{\infty}\frac{(1-q^{\gamma+n-\beta})}{(1-q^{\gamma+n-\alpha-\beta})}\,\varphi(\gamma-\alpha-\beta, 1, 1, q^{\beta})$$

erhält.

Die vorstehenden Gleichungen benütze man nun, um folgende Formeln abzuleiten:

$$\alpha)\ \frac{\sqrt{q}\,.\,\sin x}{1-q} + \frac{\sqrt{q^{3}}\,.\,\sin 3x}{1-q^{3}} + \ldots\ldots =$$

$$= \sin x\,.\left\{\frac{\sqrt{q}\,.\,(1+q)}{1-2q\cos 2x+q^{2}} + \frac{\sqrt{q^{3}}(1+q^{3})}{1-2q^{3}\cos 2x+q^{6}} + \ldots\ldots\right\}$$

$$\beta)\ \varphi\left(\alpha, 1, 1, q, q^{\frac{1}{2}-\alpha}e^{2xi}\right)\varphi\left(\alpha, 1, 1, q^{\frac{1}{2}-\alpha}e^{-2xi}\right) =$$

$$= \prod_{0}^{\infty}\frac{\left(1-2q^{\frac{2n+1}{2}}\cos 2x+q^{2n+1}\right)}{\left(1-2q^{\frac{2n+1}{2}-\alpha}\cos 2x+q^{2n+1-2\alpha}\right)}$$

$$= \prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{n-\alpha})^{2}}{(1-q^{n})(1-q^{n-2\alpha})}\left\{1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{\alpha})\ldots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{1-\alpha})\ldots(1-q^{n-\alpha})}\,q^{\frac{n}{2}-n\alpha}\cos 2nx\right\}$$

$$\gamma)\ \frac{1-2q\cos 2x+2q^{4}\cos 4x-2q^{9}\cos 6x+\ldots\ldots}{(1-q^{2})(1-q^{4})(1-q^{6})(1-q^{8})\ldots\ldots\ldots} =$$

$$= \prod_{n=0}^{\infty}(1-2q^{2n+1}\cos 2x+q^{4n+2})$$

$\delta)$ $$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-2q^{2n-1}\cos 2x+q^{4n-2})}{(1-2q^{2n}\cos 2x+q^{4n})}=$$

$$=\frac{1+q}{1-q}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(1-q^{2n-1})^2}{(1-q^{2n})^2}\left\{1+\frac{2(1-q^{-1})}{(1-q^3)}q^2\cos 2x+\right.$$

$$\left.+\frac{2(1-q^{-1})(1-q^1)}{(1-q^3)\ (1-q^5)}q^4\cos 4x+\ldots\ldots\right\}$$

66) Durch die Funktion

$$\Omega(q,a)=\prod_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q^{a+n+1}}\right),$$

welche für $a =$ einer positiven ganzen Zahl $+ n$ den Werth $(1-q)(1-q^2)\ldots\ldots(1-q^n)$ besitzt, für beliebige a den Relationen

$$\Omega(q,a)=(1-q^a)\ \Omega(a-1),\ \frac{\Omega\left(q^2,\frac{1}{2}\right)\Omega\left(q^2,-\frac{1}{2}\right)}{(1-q)}=$$

$$=\left\{\frac{(1-q^2)(1-q^4)\ldots.}{(1-q)\ (1-q^3)\ldots.}\right\}^2$$

genügt, und sich in die Reihe

$$1+\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n\frac{(1-q^a)(1-q^{a-1})\ldots.(1-q^{a-n+1})}{(1-q)\ (1-q^2)\quad\ldots.(1-q^n)}\cdot q^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

verwandeln lässt, sind folgende Funktionen auszudrücken:

$a)$ $\varphi\left(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}\right)$

$b)$ $\varphi\left(\frac{xi}{lq},\frac{-xi}{lq},\frac{1}{2},q^2,q\right)$

$c)$ $\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{xi}{lq},\frac{1}{2}-\frac{xi}{lq},\frac{3}{2},q^2,q\right)$

$d)$ $\varphi\left(\frac{1}{2}+\frac{xi}{lq},\frac{1}{2}-\frac{xi}{lq},2,q^2,q^2\right)$

(wobei $\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)$ die in der 23. Aufgabe angegebene Bedeutung besitzt.)

Schliesslich ersetze man *a*) *b*) *c*) *d*) durch die unendlichen Reihen, welche sie darstellen, ebenso auch die Funktion Ω durch ihren Werth.

X. Ueber Kettenbrüche. *)

1) Die gewöhnliche Reduction des Kettenbruches $[a_1, a_2, a_3 \dots a_n]$ liefert für Zähler und Nenner des 5. Näherungsbruches $\frac{p_5}{q_5}$ die Werthe:

$$p_5 = a_2\, a_3\, a_4\, a_5 + a_2\, a_3 + a_2\, a_5 + a_4\, a_5 + 1$$

$$q_5 = a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 + a_1\, a_2\, a_3 + a_1\, a_2\, a_5 + a_1\, a_4\, a_5 + a_3\, a_4\, a_5 + a_1 + a_3 + a_5;$$

man ermittle das Bildungsgesetz dieser Ausdrücke, und beweise dessen allgemeine Giltigkeit.

---

*) Wir bezeichnen in Folgendem einen Kettenbruch von der allgemeinsten Form:

$$\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots \cfrac{b_{n-1}}{a_{n-1} + \cfrac{b_n}{a_n}}}} \quad \text{durch} \quad \left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2} \cdots \frac{b_n}{a_n}\right],$$

setzen ferner:

$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, \dots a_n],$$

und

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \ddots \cfrac{1}{a_{n-1} - \cfrac{1}{a_n}}}} = (a, a_2, \dots a_n).$$

2) Man entwickle für den Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3} \cdots \frac{b_n}{a_n}\right]$$

ein Verfahren zur independenten Bildung der Näherungsbrüche.

3) Als besondere Fälle der vorstehenden Aufgaben berechne man den n^{ten} Näherungsbruch $\frac{p_n}{q_n}$ für folgende Kettenbrüche:

a) $[a, a, a, \ldots\ldots a]$

b) $[a, -a, a, -a, \ldots\ldots]$

c) $[a, b, a, b, \ldots\ldots]$

d) $[-a, b, -a, b, \ldots\ldots]$

e) $[a, -b, a, -b, \ldots\ldots]$

f) $\left[\frac{b}{a}, \frac{b}{a}, \frac{b}{a} \cdots\cdots \frac{b}{a}\right]$

g) $\left[a, \frac{b}{a}, a, \frac{b}{a}, \ldots\ldots\right]$

h) $\left[\frac{b}{a}, a, \frac{b}{a}, a, \ldots\ldots\right]$

und zeige, dass $\frac{p_n}{q_n}$ für *a*) auch

$$= \frac{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}\right)^n - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}\right)^n}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + 1}\right)^{n+1}} \text{ und für } f)$$

$$= \frac{b\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^n - b\left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^n}{\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{n+1} - \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}\right)^{n+1}} \text{ ist.}$$

4) Es seien

a) $\frac{b}{a}, \frac{b-b_1}{a-a_1}, \frac{b-b_2}{a-a_2}, \frac{b-b_3}{a-a_3}$, etc.

b) $\frac{b}{a}, \frac{b^2}{a^2}, \frac{b^3}{a^3}, \frac{b^4}{a^4}$, etc.

c) $\frac{b}{a}, \frac{b^3}{a^3}, \frac{b^5}{a^5}, \frac{b^7}{a^7}$, etc.

d) $\frac{b^2}{a^2}, \frac{b^4}{a^4}, \frac{b^6}{a^6}, \frac{b^8}{a^8}$, etc.

e) $\frac{b}{a}, \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}, \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}}, \frac{b^{3n+1}}{a^{3n+1}}$, etc.

auf einander folgende Näherungsbrüche von Kettenbrüchen; man berechne diese letzteren.

Wie man sieht, besitzen die Kettenbrüche *b*) und *c*) dieselben Werthe, wenn man von dem ersteren 2n — 1 und von dem letzteren n Glieder beibehält; ebenso ist der 2n gliedrige Kettenbruch *b*) mit dem n gliedrigen *d*) identisch. Man beweise nun diese Eigenschaft auch dadurch, dass man je einen dieser Kettenbrüche in den andern verwandelt.

5) Folgende Gleichungen sind zu beweisen:

$$\alpha)\ \left\{a_1 + 1 + \left[\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right]\right\} \cdot \left[\frac{a_1}{a_1}, \frac{a_2}{a_2}, \ldots \frac{a_n}{a_n}\right] =$$

$$= a_1 + \left[\frac{a_1}{a_2}, \frac{a_2}{a_3}, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n}\right]$$

$$\beta)\ \left[\frac{1}{1}, -\frac{1}{a_1}, -\frac{a_1}{a_2}, -\frac{a_2}{a_3}, \ldots -\frac{a_{n-1}}{a_n}\right] =$$

$$= \left[\frac{a_1}{a_1}, -\frac{a_2}{a_2}, -\frac{a_3}{a_3}, \ldots -\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}\right]$$

$$\gamma)\ \left[-\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, -\frac{b_3}{a_3}, \ldots\right] =$$

$$= -1 + \left[\frac{1}{1}, \frac{b_1}{a_1 - b_1 - 1}, \frac{1}{1}, \frac{b_2}{a_2 - b_2 - 1}, \frac{1}{1}, \frac{b_3}{a_3 - b_3 - 1}, \ldots\right]$$

6) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Constanten der beiden Kettenbrüche

$$\left[\frac{1}{x + a_0}, -\frac{b_0}{x + a_1}, -\frac{b_1}{x + a_2} - \ldots - \frac{b_{n-1}}{x + a_n}\right] \text{ und}$$

$$\left[\frac{1 : x}{1}, \frac{p_1 : x}{1}, \frac{p_2 : x}{1}, \ldots \frac{p_{2n} : x}{1 + p_{2n+1}}\right],$$

wenn diese einander gleich sein sollen.

7) Es ist zu zeigen, dass sich der aufsteigende Kettenbruch

$$\cfrac{\alpha + \cfrac{\beta + \cfrac{\gamma + \cfrac{\delta + \cdots}{d}}{c}}{b}}{a}$$

in den absteigenden Kettenbruch

$$\left[\frac{\alpha}{a}, -\frac{a\beta}{b\alpha+\beta}, -\frac{b\alpha\gamma}{c\beta+\gamma}, -\frac{c\beta\delta}{d\gamma+\delta}, \dots\right]$$

verwandeln lasse.

8) Man verwandle die Zahl 3·1415926 in einen Kettenbruch von der Form $a_0 + [a_1, a_2, \dots a_n]$, bestimme $a_1, a_2, \dots a_n$ so, dass die bei der Verwandlung auftretenden Divisionsreste die numerisch kleinsten Werthe erhalten, und berechne die auf einander folgenden Näherungsbrüche, so wie deren Differenzen mit dem wahren Werthe. Man betrachte ferner die obige Zahl als angenäherten Werth der Ludolph'schen Zahl π, (so dass der hiedurch begangene Fehler weniger als eine Einheit der letzten Dezimalstelle beträgt), und es frägt sich, ob der entwickelte Kettenbruch ebenfalls bis auf den letzten entwickelten Quotienten mit der Wahrheit übereinstimme? Endlich verwandle man auch obige Zahl in einen gemeinen Kettenbruch und berechne die Näherungswerthe, welche sich zwischen dem 1. und 3., dem 2. und 4. etc. Partialbruch einschalten lassen.

9) Man beweise, dass die Zähler und Nenner des Näherungsbruches $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_m}{a_m}\right]$ den Nennern der Brüche

$$\left[\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \dots \frac{b_3}{a_2}\right] \text{ und } \left[\frac{1}{a_m}, \frac{b_m}{a_{m-1}}, \dots \frac{b_2}{a_1}\right]$$

beziehungsweise gleich sind.

10) Aus dem in der vorigen Aufgabe aufgestellten Satze folgt unmittelbar, dass die beiden Näherungsbrüche $[a_1 \dots a_m]$ und $[a_m \dots a_1]$ gleiche Nenner besitzen; ferner ergeben sich auf einfache Weise noch folgende Relationen:

α) $[a_1 \dots a_m]\,[a_m \dots a_2] = [a_1 \dots a_{m-1}]\,[a_m \dots a_1]$ und

β) $[a_1 \dots a_m]\,[a_2 \dots a_m] \dots [a_{m-1}, a_m]\,[a_m] =$
$= [a_m \dots a_1]\,[a_{m-1} \dots a_1] \dots [a_2, a_1]\,[a_1]$

11) Von dem Kettenbruche $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}}\right]$ sei bekannt der reducirte Werth von $a_m + \left[\frac{b_{m+1}}{a_{m+1}}, \dots \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}}\right]$, die reducirten

Werthe von $a_l + \left[\frac{b_{l+1}}{a_{l+1}}, \dots \frac{b_{m-2}}{a_{m-2}}\right]$ und $a_l + \left[\frac{b_{l+1}}{a_{l+1}}, \dots \frac{b_{m-1}}{a_{m-1}}\right]$ und der Zähler des m^{ten} Gliedes, man berechne aus diesen Grössen den reducirten Werth von $a_l + \left[\frac{b_{l+1}}{a_{l+1}}, \dots \frac{b_{m+n}}{a_{m+n}}\right]$.

12) Zwischen welchen Grenzen liegt der begangene Fehler, wenn man statt des vollständigen Kettenbruches $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_n}{a_n}\right]$, in welchem alle Theilzähler und Theilnenner positive ganze Zahlen sind, den Näherungsbruch $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \dots \frac{b_{n-m}}{a_{n-m}}\right]$ nimmt?

13) Unter den Kettenbrüchen von specieller Form bietet insbesondere der Bruch

$$\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cfrac{1}{a_3 - \ddots}}}$$

interessante, durch die symbolische Bezeichnung $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ einfach auszudrückende Beziehungen dar. Es ist nämlich zunächst:

$$\alpha) \begin{cases} a_1 - (a_2, \dots a_n) = \dfrac{1}{(a_1, \dots a_n)} \\ (a_1, \dots a_n) = (a_1, a_2 - (a_3, \dots a_n)) = (a_1, a_2, a_3, - (a_4, \dots a_n)) = \\ \quad = (a_1, a_2, a_3, a_4 - (a_5, \dots a_n)) \dots\dots \\ (a_1, a_2, \dots a_n, \infty) = (a_1, a_2, \dots a_n), (a_1, \dots a_n, 0) = (a_1, \dots a_{n-1}). \end{cases}$$

$\beta)$ Ist $x = (a_1, a_2, \dots y)$, so ist umgekehrt $y = (a_n, a_{n-1}, \dots x)$. Da jedem Werth von x nur ein Werth von y entspricht und umgekehrt, so muss zwischen x und y eine Gleichung von der Form $A + Bx + Cy + Dxy = 0$ bestehen, und es ist:

$$\frac{A}{B} = -(a_1, b_2, \dots a_{n-1}), \quad \frac{A}{C} = -(a_n, \dots a_2)$$

$$\frac{C}{D} = -(a_1, \dots a_n), \quad \frac{B}{D} = -(a_n, \dots a_1)$$

$$\frac{A}{D} = (a_1, \dots a_n)(a_n, \dots a_2) = (a_n, \dots a_1)(a_1, \dots a_{n-1})$$

γ) Die in der Aufgabe No. 10 aufgestellte Gleichung β) gilt auch für die jetzt betrachteten Kettenbrüche.

δ) Setzt man

$$\frac{1}{(a_1, \ldots a_n)\,(a_2, \ldots a_n)\,(a_{n-1}, a_n)\,(a_n)} = ((a_1, \ldots a_n)),$$

so ist: $((a_1, \ldots . a_n)) = ((a_n, \ldots . a_1))$

$$(a_1, \ldots . a_n) = \frac{((a_2, \ldots . a_n))}{((a_1, \ldots . a_n))}$$

$$(a_n, \ldots . a_1) = \frac{((a_{n-1}, \ldots . a_1))}{((a_n, \quad \ldots . a_1))} = \frac{((a_1 \ldots . a_{n-1}))}{((a_1 \ldots . a_n \quad))}$$

$$((a_1 \ldots . a_{n-1}))\,((a_2 \ldots . a_n)) - ((a_1 \ldots . a_n))\,((a_2 \ldots . a_{n-1})) = 1$$

ε) Es ist $(a \ldots . e, f;\; a_1 \ldots . e_1, f_1;\; a_2 \ldots . e_2, f_2;\; \ldots . a_m \ldots . e_m, f_m) =$

$$= \frac{1}{((a\ldots e))}\left\{((b\ldots e)) + \cfrac{((a_1\ldots e_1))}{((a_1\ldots e_1)) - \cfrac{((a\ldots e))\,((a_2\ldots e_2))}{((a_1\ldots e_2)) - \cfrac{((a_1\ldots e_1))\,((a_3\ldots e_3))}{((a_2\ldots e_3)) - \cfrac{((a_2\ldots e_2))\,((a_4\ldots e_4))}{((a_3\ldots e_4)) - \cfrac{\vdots}{((a_{m-1}\ldots e_m)) - \cfrac{((a_{m-1}\ldots e_{m-1}))}{((a_m\ldots e_m))\,f_m - ((a_m\ldots d_m))}}}}}}\right.$$

welche Gleichung die Aufgabe löst, den Kettenbruch $(a_1 \ldots . a_n)$ in einen gleichwerthigen von geringerer Gliederzahl zu verwandeln.

ζ) Die beiden Kettenbrüche $(1,1,1,a_1, 1,1,1,a_2, 1,1,1,a_3 \ldots 1,1,1,a_n)$ und $(a_1, a_2, \ldots . a_n)$ sind einander gleich.

η) Zwischen zwei auf einander folgende Glieder des Kettenbruches lassen sich neue Elemente $b_1, b_2 \ldots . b_m$ einschalten, welche den Werth des Kettenbruches nicht ändern, wenn man von den Elementen $b_2, \ldots . b_{m-1}$ alle willkührlich bis auf eines wählt, dieses aus der Gleichung $((b_2 \ldots . b_{m-1})) = 1$ bestimmt, ferner $b_1 = ((b_3 \ldots . b_{m-1}))$ und $b_m = ((b_2 \ldots . b_{m-2}))$ macht. So ist z. B. $(a, b, c, d) = (a, b, 2, 1, 3, 1, 2, c, d)$.

14) Man betrachte die Nenner und Zähler der Näherungsbrüche des Kettenbruches $[a_1, a_2, \ldots . a_n]$, in welchem $a_1, a_2, \ldots . a_n$ als positive und ganze Zahlen angenommen worden, als

rechtwinklige Coordinaten von Punkten in der Ebene; dann lassen sich die Eigenschaften der Näherungsbrüche geometrisch ableiten, insbesondere aber zeige man, dass:

α) $p_{m+1}\, q_m - p_m\, q_{m+1} = \pm 1$

β) für $p_m < \alpha < p_{m+1}$ und $q_m < \beta < q_{m+1}$ der numerische Werth von $\alpha - \beta\, [a_1, a_2, \ldots. a_n]$ grösser ist, als jener von $p_m - q_m\, [a_1, a_2, \ldots. a_n]$ und $p_{m+1} - q_{m+1}\, [a_1, a_2, \ldots. a_n]$.

Folgende Kettenbrüche sind in Bezug ihrer Convergenz oder Divergenz zu untersuchen:

15) $$\left[\frac{3^2}{1}, \frac{4^2}{2}, \frac{5^2}{3}, \frac{6^2}{4}, \ldots.\right]$$

16) $$\left[\frac{1.2}{2}, \frac{2.3}{2^2}, \frac{3.4}{2^3}, \frac{4.5}{2^4}, \ldots.\right]$$

17) $$\left[\frac{1}{2}, \frac{1.2^2}{3^2}, \frac{2^2.3^3}{4^3}, \frac{3^3.4^4}{5^4}, \ldots.\right]$$

18) $$\left[\frac{a+1}{a-1}, \frac{\sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}}, \frac{\sqrt[3]{(a+1)^2}}{\sqrt[3]{(a-1)^2}}, \frac{\sqrt[4]{(a+1)^3}}{\sqrt[4]{(a-1)^3}}, \ldots.\right]$$

19) $$\left[\frac{\frac{1}{1.2}}{\sin\frac{\pi}{2}}, \frac{\frac{1}{2.3}}{\sin\frac{\pi}{3}}, \frac{\frac{1}{3.4}}{\sin\frac{\pi}{4}}, \frac{\frac{1}{4.5}}{\sin\frac{\pi}{5}}, \ldots.\right]$$

20) $$\left[\frac{\frac{3}{4}}{2\,\text{tang}\,\frac{a^2}{2}}, \frac{\frac{5.4}{7.3}}{3\,\text{tang}\,\frac{a^2}{3}}, \frac{\frac{7.7}{10.5}}{4\,\text{tang}\,\frac{a^2}{4}}, \frac{\frac{9.10}{13.\ 7}}{5\,\text{tang}\,\frac{a^2}{5}}, \ldots.\right]$$

21) $$\left[\frac{l\left(\frac{3}{2}\right)}{a-(a-1)}, \frac{l\left(\frac{5}{4}\right)}{a+(a-1)}, \frac{l\left(\frac{7}{6}\right)}{\sqrt{a}-\sqrt{a-1}}, \frac{l\left(\frac{9}{4}\right)}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}, \ldots.\right]$$

22) $$\left[\frac{\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1}, \ldots. \frac{\sum_{r=0}^{r=2n}\frac{1}{\sqrt{n^2+r}}}{1}, \ldots.\right]$$

23) $$\left[\frac{1+\frac{1}{2}}{1}, \ldots \frac{\sum\limits_{r=0}^{r=n}\frac{1}{n+r}}{\sum\limits_{1}^{n}(-1)^{n+1}\frac{1}{r}}, \ldots\right]$$

24) $$\left[\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots\right]$$ 25) $$\left[\frac{1.3}{1}, \frac{3.5}{1}, \frac{5.7}{1}, \ldots\right]$$

26) $$\left[\frac{2}{1}, \frac{1}{1}, \frac{4}{1}, \frac{3}{1}, \frac{6}{1}, \frac{5}{1}, \ldots\right]$$

27) $$\left[1, \frac{2}{1}, \frac{2^3}{1}, \frac{2^6}{1}, \frac{2^{10}}{1}, \ldots\right]$$ 28) $$\left[1, \frac{2}{1}, \frac{2^2}{1}, \frac{2^3}{1}, \frac{2^4}{1}, \ldots\right]$$

29) $$\left[\frac{\alpha}{a^2}, \frac{\alpha^2}{a^2}, \frac{\alpha^3}{a^2}, \ldots\right]$$ 30) $$\left[\frac{m^2}{n}, \frac{(m+n)^2}{n}, \frac{(m+2n)^2}{n}, \ldots\right]$$

31) $$\left[\frac{1^k}{a^2}, \frac{2^k}{a^2}, \frac{3^k}{a^2}, \ldots\right]$$ 32) $$\left[\frac{1^k\,h^2}{a^2}, \frac{2^k\,(h^2+1)}{a^2}, \frac{3^k\,(h^2+2)}{a^2}, \ldots\right]$$

33) $$\left[\frac{k^{2r}.1.3.m^2}{a^2}, \frac{(k^2+l^2)^r.2.4.m^2}{a^2}, \frac{(k^2+2l^2)^r.3.5.m^2}{a^2}, \ldots\right]$$

34) $$\left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \ldots\right]$$

35) $$\left[\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\ldots\right]$$

36) $$\left[\frac{2}{5}, -\frac{2.3}{5.6}, \frac{2.3.4}{5.6.7}, -\frac{2.3.4.5}{5.6.7.8}, \ldots\right]$$

37) $$\left[\frac{\sin 1}{1}, -\frac{\sin\frac{1}{2}}{2}, \frac{\sin\frac{1}{3}}{3}, -\frac{\sin\frac{1}{4}}{4}, \ldots\right]$$

38) $$\left[-\frac{1^2.3}{2^2.4^2}, \frac{2^2.4^2.6^2}{1^2.3^2.5}, -\frac{1^2.3^2.5^2.7}{2^2.4^2.6^2.8^2}, \frac{2^2.4^2.6^2.8^2.10^2}{1^2.3^2.5^2.7^2.9}, -\ldots\right]$$

39) $$\left[\frac{x}{1-x}, -\frac{x^2}{1-x^2}, \frac{x^3}{1-x^3}, -\frac{x^4}{1-x^4}, \ldots\right]$$

40) $$\left[\frac{1}{1+x}, -\frac{x}{2(1+x)(1+2x)}, \frac{2x^2}{3(1+x)(1+2x)(1+3x)}, -\frac{2.3x^3}{4(1+x)(1+2x)(1+3x)(1+4x)}, \ldots\right]$$

41) $\left[-\frac{x}{y+1}, \frac{x+1}{y+2}, -\frac{x+2}{y+3}, \frac{x+3}{y+4}, -\ldots\right]$

42) Es ist zu zeigen, dass sich der unendliche Kettenbruch $m+\left[\frac{n}{m+1}, \frac{n+1}{m+2}, \frac{n+2}{m+3}, \ldots\right]$, in welchem m und n positive und ganze Zahlen bedeuten und $n \geqq m+2$ ist, in den endlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{n-1}{-m+1}, \frac{n-2}{-m+2}, \frac{n-3}{-m+3}, \ldots \frac{1}{-m+n-1}\right],$$

welcher den Werth

$$\frac{(n-1)\{1+(n-m-2)_1(n-2)+(n-m-2)_2(n-2)(n-3)+\ldots}{1+(n-m-2)_1(n-1)+(n-m-2)_2(n-1)(n-2)+\ldots}$$
$$\frac{\ldots(n-m-2)_{n-2}(n-2)(n-3)\ldots 2.1\}}{\ldots(n-m-2)_{n-1}(n-1)(n-2)\ldots 2.1}$$

besitzt, verwandeln lässt. Ferner beweise man, dass auch die beiden endlichen Kettenbrüche

$$m+1+\left[\frac{n-m-2}{m+3}, \frac{n-m-3}{m+4}, \ldots \frac{1}{n}\right] \text{ und}$$
$$-1+\left[\frac{n-m-1}{-m-1}, \frac{n-m}{-m}, \frac{n-m+1}{-m+1}, \ldots \frac{1}{-n+1}\right]$$

dem unendlichen Kettenbruche dem Werthe nach gleich sind.

43) Der unendliche Kettenbruch

$$m+\left[\frac{n}{m+d}, \frac{n+d}{m+2d}, \frac{n+2d}{m+3d}, \ldots\right],$$

wo m, n, d ganze positive Zahlen bedeuten, $n > m+d$ und $\frac{n}{d}$ eine ganze Zahl ist, lässt sich in den gleichgeltenden endlichen Kettenbruch

$$\left[\frac{n-d}{-m+d}, \frac{n-2d}{-m+2d}, \frac{n-3d}{-m+3d}, \ldots\right]$$

verwandeln, und besitzt somit einen rationalen Werth.

44) Der Werth des unendlichen Kettenbruches

$$m-\left[\frac{n}{m+1}, -\frac{n+1}{m+2}, -\frac{n+2}{m+3}, \ldots\right]$$

(in welchem m und $n \gtreqless m$ positive ganze Zahlen sind), ist durch Verwandlung in einen gleichgeltenden endlichen Kettenbruch zu bestimmen.

45) Der unendliche Kettenbruch

$$m - \left[\frac{n}{m+d}, -\frac{n+d}{m+2d}, -\frac{n+d}{m+3d}, \ldots\right],$$

in welchem m, n, d und $\frac{n}{d}$ positive ganze Zahlen bezeichnen, und $n \geqq m + d - 1$ ist, besitzt einen rationalen, dem endlichen Kettenbruche

$$\left[\frac{n-d}{m-d}, -\frac{n-2d}{m-2d}, -\frac{n-3d}{m-3d}, \ldots\right]$$

gleichen Werth.

46) Es ist der periodische Kettenbruch $[a_1, a_2, \ldots a_n, a_1, a_2, \ldots]$, welcher eine n gliederige Periode besitzt, in einen Kettenbruch von eingliederiger Periode zu verwandeln, und der Werth des Näherungsbruches zu berechnen, welcher m Perioden des Kettenbruches entspricht.

47) Wenn man in dem periodischen Kettenbruche $\left[\frac{b}{a}, \ldots\right]$ an die Stelle von b und a beziehungsweise die Grössen $-b^2$ und $a^2 + 2b$ treten lässt, so erhält man einen neuen periodischen Kettenbruch, welcher das negativ genommene Quadrat des ersteren ist. Um ferner einen periodischen Kettenbruch zu erhalten, welcher der dritten Potenz des ursprünglichen gleich ist, ersetze man b durch b^3 und a durch $a^3 + 3ab$. Man beweise und erweitere diese Eigenschaft.

48) Man beweise:

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(6, 6, 6, \ldots) \\ &= \frac{17}{12} - \frac{1}{2}(34, 34, 34, \ldots) \\ &= \frac{7}{5} + \frac{1}{5}[14, 14, 14, \ldots]\end{aligned}$$

$$\sqrt{3} = \frac{15}{8} - \frac{1}{8}(62, 62, 62, \ldots.)$$
$$= \frac{15}{8} - \frac{1}{8.62} - \frac{1}{8.62}(3842, 3842, 3842, \ldots.)$$
$$\sqrt{6} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(10, 10, 10, \ldots.)$$
$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{19}\left\{12 + \left[\frac{27}{100}, \frac{27}{100}, \frac{27}{100}, \ldots.\right]\right\}$$
$$\sqrt{17} = 3 + \frac{2}{11}\left\{6 + \left[\frac{8}{45}, \frac{8}{45}, \frac{8}{45}, \ldots.\right]\right\}$$

Für $\sqrt{a^2} \pm b$ ist

$$a \pm b \cdot \frac{(2a)^{r-1} \pm (r-2)(2a)^{r-3} b + (r-3)_2 (2m)^{r-5} b^2 \pm \ldots.}{(2a)^r \pm (r-1)(2m)^{r-2} b + (r-2)_2 (2m)^{r-4} b^2 \pm \ldots.}$$

ein angenäherter Werth.

49) Es seien $m = p^2 - q$, p, q, a, b beliebige, an die Bedingung $2p \geqq q + 1$ gebundene positive und ganze Zahlen; dann convergiren die Brüche $\frac{b}{a}$, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{pb + ma}{b + pa}$, $\frac{b_2}{a_2} = \frac{pb_1 + ma_1}{b_1 + pa_1}$, $\frac{b_3}{a_3} = \frac{pb_2 + ma_2}{b_2 + pa_2}$ etc. gegen $\sqrt{m}$.

Die vorstehenden Brüche haben auch dann noch $\sqrt{m}$ zur Grenze, wenn q eine negative Zahl ist, in welchem Falle die Bedingung $2p \geqq q + 1$ wegfällt.

50) Die Brüche $\frac{b}{a}$, $\frac{b_1}{a_1} = \frac{6a - b}{35a - 6b}$, $\frac{b_2}{a_2} = \frac{6a_1 - b_1}{35a_1 - 6b}$ etc. convergiren gegen die Zahl $3 - 2\sqrt{2}$ für beliebige positive ungleiche a und b. Unter derselben Voraussetzung ist ferner $5 - 2\sqrt{6}$ der Grenzwerth, welchem sich die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{99b - 10a}{980b - 99a}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{99b_1 - 10a_1}{980b_1 - 99a_1}, \text{ etc.}$$

und $7 + 5\sqrt{2}$ der Grenzwerth, dem sich die Brüche

$$\frac{a}{b}, \frac{a_1}{b_1} = \frac{197b + 14a}{14b + a}, \frac{a_2}{b_2} = \frac{197b_1 + 14a_1}{14b_1 + a_1}, \text{ etc.}$$

mit zunehmendem Stellenzeiger (auch für $a = b$) immer mehr nähern.

51) Es ist der Ausdruck $\sqrt{a^2 + b}$ in einen stark convergirenden aufsteigenden Kettenbruch zu verwandeln.

52) Es sei

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)} x +$$

$$+ \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} x^2 + \ldots ;$$

man verwandle diese und die Reihen

$$\varphi(-n, \beta, \beta, q, -xq^n),\ \varphi(-g, \beta, \beta, q, -xq^g),\ \varphi(g, \beta, \beta, q, -x),$$

in welchen g eine unendlich grosse Zahl bedeutet, nach der allgemeinen (Euler'schen) Methode in Kettenbrüche. Auf gleiche Weise verwandle man in Kettenbrüche die letzten acht der in der 23[sten] Aufgabe des vorigen Kapitels angegebenen Funktionen.

53) Man beweise die Gleichungen:

$$a)\ \sum_{n=1} \frac{x^n}{1-x^n} = \left[\frac{x}{1-x}, -\frac{x(1-x)^2}{1-x^2}, -\frac{x^2(1-x)^2}{1-x^3}, -\frac{x^2(1-x^2)^2}{1-x^4}, -\ldots\right]$$

$$b)\ \frac{\sum\limits_{n=1} \frac{1}{x^{n.n}}}{\sum\limits_{n=0} \frac{1}{x^{n.n}}} = \left[\frac{1}{x+1}, -\frac{x}{x^3+1}, -\frac{x^3}{x^5+1}, -\frac{x^5}{x^7+1}, -\frac{x^7}{x^9+1}, -\ldots\right]$$

54) Man transformire folgende Reihen in Kettenbrüche:

$a)\ 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots..$

$b)\ \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} + \ldots..$

$c)\ \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots..}{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots..}$

55) Es bezeichne $F(\alpha, \beta, \gamma)$ die Summe der hypergeometrischen Reihe, und man verwandle die Funktion $F(\alpha, 1, \gamma, x)$ in einen Kettenbruch von der Form $\left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, -\frac{\varrho_2 x}{1}, -\ldots\right]$; dann ist der Nenner q_{2m-1} des 2m[ten] Näherungsbruches gleich $F(1-m-\alpha, -m, 2-2m-\gamma, x)$

$$= 1 + \sum_{1}^{m} (-1)^n (m)_n \frac{(\alpha + m - 1)_n}{(\gamma + 2m - 2)_n} x^n$$

und $q_{2m+1} = F(-m-\alpha, -m, 1-2m-\gamma) =$

$$= 1 + \sum_{1}^{m} (-1)^n (m)_n \frac{(\alpha + m)_n x^n}{(\gamma + 2m - 1)_n}$$

56) Bildet man die Näherungsbrüche des Kettenbruches

$$\left[\frac{1}{1}, -\frac{x}{1}, +\frac{x}{2}, -\frac{x}{3}, + \ldots\right] = e^x,$$

so findet man für zwei auf einander folgende Zähler und Nenner die Werthe

$$p_{2m-1} = 1 + \frac{m-1}{2m-1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{(m-1)\ (m-2)}{(2m-1)\ (2m-2)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$p_{2m} \quad = 1 + \frac{m}{2m} \cdot \frac{x}{1} + \frac{m\,(m-1)}{2m\,(2m-1)} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$q_{2m-1} = 1 - \frac{(m)_1}{(2m-1)_1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{(m)_2}{(2m-1)_2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

$$q_{2m} \quad = 1 - \frac{(m)_1}{(2m)_1} \cdot \frac{x}{1} + \frac{(m)_2}{(2m)_2} \cdot \frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

57) Man berechne für den Kettenbruch

$$\left[\frac{x}{1}, \frac{\frac{1.1}{1.2}x}{1}, \ldots\right] = l\,(1+x)$$

die Werthe q_{2m} und q_{2m+1} der Nenner zweier auf einander folgenden Näherungsbrüche.

58) Die in der 52. Aufgabe angegebene Funktion besitzt die Eigenschaft, dass $\varphi(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$

$$= q^\beta . x \frac{(1-q^\alpha)\,(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)\,(1-q^{\gamma+1})} \varphi(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 2, q, x)$$

ist; man benütze dieselbe, um den Quotienten

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}$$

in einen Kettenbruch von der Form

$$\left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, -\frac{\varrho_2 x}{1}, -\frac{\varrho_3 x}{1}, - \ldots\right] \text{ zu verwandeln.}$$

Man beweise ferner folgende Gleichungen und transformire die Quotienten der Funktionen φ, welche in den rechten Theilen vorkommen, in Kettenbrüche:

$$\frac{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\cfrac{1}{1-q^{\alpha}x\,\dfrac{(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\dfrac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}}$$

$$\frac{\varphi(\alpha,\beta+1,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\cfrac{1}{1-q^{\beta}x\,\dfrac{(1-q^{\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\dfrac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}}$$

$$\frac{\varphi(\alpha-1,\beta+1,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\cfrac{1}{1+q^{\alpha-1}x\,\dfrac{(1-q^{\beta+1-\alpha})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\dfrac{\varphi(\beta+1,\alpha,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\beta+1,\alpha-1,\gamma,q,x)}}$$

$$\frac{\varphi(\alpha+1,\beta-1,\gamma,q,x)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=\cfrac{1}{1-q^{\alpha}x\,\dfrac{(1-q^{\beta-\alpha-1})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\dfrac{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta-1,\gamma,q,x)}}$$

$$q^{\alpha}\frac{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,qx)}{\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x)}=1-\cfrac{(1-q^{\alpha})}{1-q^{\alpha}x\,\dfrac{(1-q^{\beta})}{(1-q^{\gamma})}\cdot\dfrac{\varphi(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1,q,x)}{\varphi(\alpha+1,\beta,\gamma,q,x)}}$$

59) Die in der vorhergehenden Aufgabe aufgestellten allgemeinen Formeln benütze man zur Verwandlung folgender Reihen:

a) $$1+\sum_{n=1}\frac{x^n}{(1-q^{\gamma})\ldots.(1-q^{\gamma+n-1})}$$

b) $$1+\sum_{n=1}(-1)^n\frac{q^n x^n}{(1-q^{\gamma})\ldots.(1-q^{\gamma+n-1})}$$

c) $$1+\sum_{n=1}\frac{x^n z^n}{(1-x)\ldots.(1-x^n)}$$

d) $$1+\sum_{n=1}(q^{\alpha}-1)\ldots.(q^{\alpha+n-1}-1)\frac{x^n}{q^{n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}}}$$

e) $$1+\sum_{n=1}(q^{\alpha}-1)\ldots.(q^{\alpha+n-1}-1)\frac{x^n}{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

f) $\sum\limits_{n=0} q^{n\alpha+\frac{n(n-1)}{2}} x^n$ *g*) $\sum\limits_{n=0} q^{2n\alpha+n(n-2)} \cdot x^n$

h) $\sum\limits_{n=0} \frac{x^n}{q^{n \cdot n}}$ *i*) $\sum\limits_{n=0} q^n x^n$

k) $\sum\limits_{n=0} q^{n\gamma+\frac{n(n+1)}{2}} x^n$ *l*) $1 + \sum\limits_{n=1} \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}} z^n}{(1-x) \ldots (1-x^n)}$

m) $1 + \sum\limits_{n=1} \frac{(1-z) \ldots (1-z^{2n-1})}{(1-z^2) \ldots (1-z^{2n})}$

n) $$\frac{1 + \sum\limits_{n=0} \frac{(1-q^6)\, q^{2n+2}\, x^{2n+2}}{(1-q^{10+4n})}}{1 + \sum\limits_{n=0} \frac{(1-q^2)\, q^{2n+2}\, x^{2n+2}}{(1-q^{6+4n})}}$$

o) $$\frac{\sum\limits_{n=0} (-1)^n q^{2n} x^n}{\sum\limits_{n=0} (-1)^n \frac{(1-q)}{(1-q^{2n+1})} q^{2n} x^n}$$

p) $$\frac{1 + \sum\limits_{n=1} \frac{(1-q^3) \ldots (1-q^{2n+1})}{(1-q^2) \ldots (1-q^{2n})} q^n x^n}{1 + \sum\limits_{n=1} \frac{(1-q) \ldots (1-q^{2n-1})}{(1-q^2) \ldots (1-q^{2n})} q^n x^n}$$ *q*) $$\frac{1}{\sum\limits_{n=0} \frac{2q^n z^n}{1+q^{2n}}}$$

r) $$\frac{\sum\limits_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{(1+q^2)}{(1+q^{2n})} q^{2n} z^{n-1}}{\sum\limits_{n=1} (-1)^{n-1} \frac{(1+q^2)}{(1+q^{2n})} z^{n-1}}$$ *s*) $$\frac{1}{\sum\limits_{n=0} \frac{2q^n z^n}{1+q^n}}$$

60) Verwandelt man die Funktion $\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x)$ in einen Kettenbruch von der Form $\left[\frac{1}{1}, -\frac{a_1 x}{1}, -\frac{a_2 x}{1}, - \ldots\right]$ und bezeichnet man die Nenner der Näherungsbrüche durch den Buchstaben Q, so ist

$$Q_{2n-1} = \varphi(-n, 1-\alpha-n, 2-\gamma-2n, q, q^{\alpha+1-\gamma}x) \text{ und}$$
$$Q_{2n} = \varphi(-n, -\alpha-n, 1-\gamma-2n, q, q^{\alpha+1-\gamma}x).$$

Verwandelt man ferner den Quotienten

$$\frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \alpha+1, q, x)}{\varphi(1, \beta, 1, q, x)}$$

in einen Kettenbruch von der angegebenen Form, so ist

$$Q_{2n-1} = \varphi(-n, 1+\beta-\alpha-n, 1-\alpha-2n, q, x) \text{ und}$$
$$Q_{2n} = \varphi(-n, \beta-\alpha-n, -\alpha-2n, q, x).$$

Folgende unendliche Produkte sind in Kettenbrüche zu verwandeln:

61) $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdots\cdots$

62) $\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdots\cdots$

63) $\sqrt{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{10}{11} \cdots\cdots$

64) $\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdots\cdots$

65) $(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7) \cdots\cdots$

66) $\left(1-\frac{x}{p}\right)\left(1-\frac{x}{p^2}\right)\left(1-\frac{x}{p^3}\right)\left(1-\frac{x}{p^4}\right) \cdots\cdots$

67) $(1+qx)(1+q^2x)(1+q^3x)(1+q^4x) \cdots\cdots$

68) $\frac{(1-x)(1-px)(1-p^2x)(1-p^3x) \cdots\cdots}{(1-y)(1-py)(1-p^2y)(1-p^3y) \cdots\cdots}$

Folgende Kettenbrüche sind in unendliche Produkte zu verwandeln:

69) $1 + \left[\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \cdots\right]$

70) $\left[\frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{5}, +\frac{1}{2}, -\frac{1}{7} \cdots\right]$

71) $1 + \left[\frac{1^2}{2}, \frac{3^2}{2}, \frac{5^2}{2}, \cdots\right]$

72) $\left[\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2^2}{5}, \frac{3^2}{7}, \frac{4^2}{9}, \cdots\right]$

73) Man stelle die Grundzahl des natürlichen Logarithmensystemes als einen Quotienten zweier Kettenbrüche dar, und verwandle letztere in unendliche Produkte.

Erläuterungen und Resultate zu den vorhergehenden Aufgaben.

Zu I.

1*a*) $(r+n)_n$. 1*b*) $(r+n)_n-(r+n-p)_n$.

1*c*) $(r+n)_n-(r+n-p)_n-(r+n-q)_n-(r+n-q-p)_n$.

7) $=x+yz$. 9) $xy+xz+yz$. 11) $xyz+xyt+xzt+yzt$.

13) Bezeichnet $C_q{}^p$ die Summe der Produkte von je q der p Grössen $x_1, x_2, \ldots x_p$, so ist der vorgelegte Ausdruck $=C_1{}^n \, . \, C_2{}^n - C_3{}^n$. Vertauscht man in dem Ausdrucke a_1 mit a_n, a_2 mit a_{n-1}, a_3 mit a_{n-2} etc. ... a_{n-1} mit a_2 und a_n mit a_1, so erhält man einen neuen Ausdruck, welcher in Verbindung mit dem früheren die von Waring angegebene Identität liefert.

14) $\dfrac{x_1+x_2+\ldots x_n}{a(a+x_1+x_2+\ldots+x_n)}$ 15) $\dfrac{(-1)^n(A-x_1)(A-x_2)\ldots(A-x_n)}{x_1\,x_2\ldots\ldots x_n}$

17) 18) 19) ähnlich wie 14) zu beweisen. 22) $\dfrac{n!}{(n-m)!}=(n)_m\,m!$

23) $(n)_m\cdot\dfrac{m!}{\alpha'!\,\beta'!\,\gamma'!\ldots\mu'!}$ 30) Man setze: $x=ty$ etc.

40) Die Anzahl der möglichen Glieder ist

$(n+m-2)_m+(n+m-4)_{m-2}+\ldots\ldots+1$ für ein gerades m und

$(n+m-3)_{m-1}+(n+m-5)_{m-3}+\ldots\ldots+1$ für ein ungerades m.

45) bis 50) Sämmtliche Ausdrücke sind in der allgemeinen Form $\sqrt{m+nx+px^2}$ enthalten. Um diesen letzteren Ausdruck rational durch eine Variable z auszudrücken, setze man $\sqrt{m+nx+px^2}=\sqrt{m}+xz$, wenn $m>0$, oder $=z+x\sqrt{p}$, wenn $p>0$ oder endlich $=z(x-w_1)$, wenn w_1 eine der als reell vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung $x^2+\dfrac{n}{p}x+\dfrac{m}{p}=0$ bezeichnet. Es ist dann im ersten Falle

$x=\dfrac{2z\sqrt{m}-n}{p-z^2}$ und $\sqrt{m+nx+px^2}=\dfrac{z^2\sqrt{m}-nz+p\sqrt{m}}{p-z^2}$, im zweiten Falle: $x=\dfrac{m-z^2}{2z\sqrt{p}-n}$ und $\sqrt{m+nx+px^2}=\dfrac{z^2\sqrt{p}-nz+m\sqrt{p}}{2z\sqrt{p}-n}$

und im dritten Falle: $x=\dfrac{w_2p-w_1z^2}{p-z^2}$ und $\sqrt{m+nx+px^2}=\dfrac{p(w_2-w_1)z}{p-z^2}$.

Man versuche aber auch die vorliegenden Funktionen rational zu machen, ohne sie erst auf die Form des obigen Ausdruckes zu bringen.

51) bis 61) Wenn y mit x durch eine Gleichung von der Form $A_0y^n+A_1y^{n-1}x+A_2y^{n-2}x^2+\ldots+A_nx^n=x^{n-m-1}(a_0y^m+a_1y^{m-1}x+\ldots+a_mx^m)$ verbunden ist, in welcher n und m positive ganze Zahlen bezeichnen, so lässt sich sowohl y als x durch eine neue Veränderliche z rational ausdrücken. Denn setzt man $y=xz$, so liefert die obige Gleichung

$$x = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + a_m}{A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + A_n}$$

und daher $y = z\left(\frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots\ldots + a_m}{A_0 z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots\ldots + A_n}\right)$

Mittelst derselben Substitution lassen sich die beiden Variablen x und y als explicite — wenn auch im Allgemeinen nicht rationale — Funktionen von z darstellen, wenn die zwischen x und y bestehende Gleichung entweder die Form hat: $A_0 y^n + A_1 y^{n-1} x + \ldots + A_n x^n = a_0 y^m + a_1 y^{m-1} x + \ldots + a_m x^m$ oder wenn in derselben zwar dreierlei Dimensionen vorkommen, jedoch der Art, dass die höchste die mittlere um ebensoviele Einheiten übersteigt, als diese die niedrigste.

Zu II.

16) u. 17) Durch wiederholte Anwendung der Formel $2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \sqrt{2 - 2\sin x}$ zu beweisen, indem man $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ an die Stelle von x treten lässt.

22) $\frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{x}{2}$ 23) $\frac{1}{3}\operatorname{arctang}\frac{x}{3}$ 24) $\frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{x}{4}$

25) bis 28) Sämmtliche Ausdrücke sind $= \operatorname{arctang}\frac{x}{y}$

38) $x = \pm(1 + \sqrt{3})$ 39) $x = -\sqrt{3} \pm \sqrt{26}$ 40) $x = \pm\sqrt{2}$

41) $x = \frac{\pi}{2}$ u. $\frac{\pi}{6}$ 42) $x = \pm\cos\frac{a}{2}$ u. $\pm\sin\frac{a}{2}$

43) $x = \pm\operatorname{arctang}\frac{3}{4} + k\pi$ 44) $x = \pm ab$ 45) $x = 1 + \sqrt{\frac{2b}{1+b}}$

46) $x = \pm 1, \frac{1}{2}$ 48) $x = -1,\ y = +1$

49) Es ist: $x^2 + y^2 = 6y - 8$ 50) $\frac{x}{y} = 1$ 51) $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$

$x^2 + y^2 = 5$ etc. $x^2 + y^2 = 1$ etc. $\frac{x+y}{x} = x$ etc.

52) $x^2 + y^2 = a^2$ 53) $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = a$

$x^2 - y^2 = b^2$ etc. $\frac{x^2 + y^2}{2y} = \frac{b^2}{\sqrt{2b^2 + x^2}}$ etc.

54) $x^3 + y^3 = \frac{35}{216}$

$x + y = \frac{5}{6}$ etc.

Zu III.

Es ist 1) $\lim \frac{(1+\delta)^m - 1}{\delta} = 1$ 11) $\lim (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = e$

22) $\lim \frac{a^\delta - 1}{\delta} = l\,a$ 31) $\lim \frac{\sin\delta}{\delta} = 1$ *)

Die Grenzwerthe 2) bis 10) lassen sich mittelst 1)
12) bis 21) „ „ „ 11)
23) bis 30) „ „ „ 22)
32) bis 45) „ „ „ 31) bestimmen, und zwar
findet man für:

2) $\frac{m b a^{m-1}}{c}$ 3) $\frac{1}{2a^2}$ 4) $\frac{1}{n a^{n-1}}$ 5) $\sqrt{a}$ 6) $\frac{2}{n a^{n-1}}$ 7) $\frac{m}{b+c}$

8) $-2m$ 9) $\frac{n b a^{n-1}}{c}$ 10) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}\right)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{5}{4}\right)^3} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-1}}$

12) $e^{\frac{ab}{c}}$ 13) a 14) e 15) $\frac{a-b}{c}$ 16) $a-b$ 17) $e^{-\frac{1}{a}}$

18) m 19) $e^{\frac{b-c}{a}}$ 20) $\frac{1}{\sqrt{e}}$ 21) $\frac{1}{6}$ 23) $l\left(\frac{a}{b}\right)$ 24) $l\,a$

25) $2\frac{l a - l b}{l b - l c}$ 26) $\frac{2 l (ab)}{l (bc)}$ 27) $e\,l\,(ab)$ 28) $\frac{\pi^2}{8}$ 29) 4 30) 1

32) ∞ 33) 1 34) $\frac{1}{n}$ 35) $\frac{1}{p^n}$ 36) $\sqrt{2}$ 37) a 38) $\frac{a-b}{g-h}$

39) $\frac{1+a^2}{\cos^2 a}$ 40) $4r^2\pi$ 41) 1 42) $-e$ 43) $\sin(r + \alpha\sin\varphi)$

44) $\frac{c}{a}$ 45) 1

46) -1 47) 2 48) 1 49) -1 50) -1 51) $l\left(\frac{b}{a}\right)$

52) -1 53) $e^{\frac{2}{\pi}}$ 54) $e^{\frac{4}{\pi}}$ 55) $l\,a - 1$ 56) $4a$ 57) e

58) $e^{\alpha\cos\varphi}$ 59) $l\,c\sqrt[n]{\frac{a}{bd}}$ 60) $2m-1$ 61) $\frac{e^{\frac{r}{\pi}} - 1}{e^{\frac{r}{\pi}} - e^{\frac{r-1}{\pi}}}$

62) $\frac{r(r+1)}{2(l a - l b)}$ 63) $\frac{e^{\frac{r}{2}} - 1}{e^{\frac{1}{2}} - 1}$ 64) $\frac{1}{2}$ 65) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{n=r}\frac{1}{n}$ 66) $e^{\frac{r(r-1)}{2\pi}}$

*) Siehe Schlömilch's Handbuch der algebraischen Analysis, 3. Auflage, § 7 u. d. f.

67) Der vorliegende Bruch ist

$$= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{\pi}{4}\cdot\sin\left(\frac{n+2}{n}\right)\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{4}} : \frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{\pi}{2n}$$

und daher dessen Grenzwerth $= \frac{8}{\pi^2}$

68) $$\lim \frac{\sin\left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{n+2}{n}\right)\cdot\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{1}{n}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{n(n+1)}{n}\cdot\frac{\pi}{2n}} = \frac{8}{\pi^2}$$

69) $$\lim \frac{\sin^2\frac{\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n^2}} = \frac{2}{\pi}$$ 70) $$\lim \left(\frac{3}{2}\right)^n\left[\operatorname{tang}\left(\frac{2}{3}\right)^n\pi - \operatorname{tang}\frac{\pi}{3^n}\right] = \pi$$

71) $\lim n \operatorname{arctang}\frac{x}{n} = x$

72) Der Ausdruck ist grösser als $n\cdot\frac{\pi}{n} - \frac{\pi^3}{4n^3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}$, dagegen kleiner als $n\cdot\frac{\pi}{n}$ etc.

73) Der Grenzwerth ist 1.

74) Mit Benützung der Ungleichheit $1^2.2^2.3^2\ldots.n^2 > n^n$ lässt sich zeigen, dass der Ausdruck $>$ ist als $\frac{\log n}{4}$ etc.

75) 76) zweckmässig durch goniom. Funkt. zu bestimmen, und zwar ist $\lim a_1 \ldots. a_n = \frac{a_1\sqrt{1-a_1^2}}{\arccos a_1}$ und $\lim \varphi(n) = \frac{\pi^2}{8}$

77) Ist $b > a$, so findet man mit Hilfe goniom. Funktionen

$$\lim a_n = \lim b_n = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\frac{a}{b}}$$

Ist $a < b$, so benütze man folgende Identitäten:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}\cdot\frac{A^{\frac{1}{2}}+A^{-\frac{1}{2}}}{A^{\frac{1}{2}}-A^{-\frac{1}{2}}}$$

und $b = \frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{\left(A^{\frac{1}{2}}+A^{-\frac{1}{2}}\right)\left(A^{\frac{1}{2}}-A^{-\frac{1}{2}}\right)}$, worin $A = \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$,

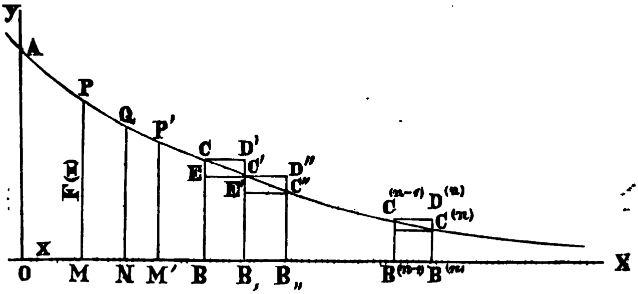
und man findet $lim\ a_n = lim\ b_n = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{l\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right)}$

80) $lim\ A_n = lim\ 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \ldots\ldots = \pi$

81) $lim\ A_n = lim\ 2^n \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2} + \ldots\ldots}} = \pi$

(Welcher geometrischen Deutung ist A_n fähig?)

82) Die Richtigkeit dieses Satzes ist leicht zu beweisen, wenn man $F(x)$ die über die Abscisse $x = OM$ stehende Fläche $AOMP$ bedeuten läst. Ist nämlich $MM' = \delta$, so ist zunächst $F(x + \delta) - F(x) =$ Fläche $MM'P'P$, welche man sich als ein Rechteck denken kann, das δ zur



Grundlinie und eine zwischen MP und $M'P'$ liegende Ordinate NQ zur Höhe hat. Hieraus folgt: $\frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = NQ$ und $lim \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta}$ $= lim\ NQ = MP$, als geometrische Bedeutung von $f(x)$. Ist nun $OB = a$, $BB' = B'B'' = B''B''' = \ldots\ldots = B^{(n-1)}B^{(n)} = 1$, so ist offenbar die Fläche $BB^{(n)}C^{(n)}C$ kleiner als die Summe der Rechtecke BD', $B'D''$, ... $B^{(n-1)}D^{(n)}$; dagegen grösser als die Summe der Rechtecke BC', $B'C''$, ... $B^{(n-1)}C^{(n)}$, mithin:

$F(a + n) - F(a) < f(a) + f(a + 1) + \ldots\ldots + f(a + n - 1)$ und

$F(a + n) - F(a) > f(a + 1) + f(a + 2) + \ldots\ldots + f(a + n)$, oder auch:

$F(a + n) - F(a) + f(a) - f(a + n) > f(a) + f(a + 1) + \ldots f(a + n - 1)$.

83) $F(a) = la$ 84) $F(a) = lla$ 85) Man setze $a^2 = b$ und $F(b) = 2\sqrt{b}$.

Zu V.

33) $u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $S_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

34) $S_n = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+n+1}$

35) $u_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$, $S_n = 4 - \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^2$

36) bis 40) **Ist das allgemeine Glied einer Reihe ein rationaler Bruch, dessen Nenner dem Produkte der $r+1$ Faktoren $n+a$, $n+a+s_1$, ... $n+a+s_r$ gleich und dessen Zähler in Bezug auf n höchstens von der $r-1^{\text{sten}}$ Ordnung ist, und sind sämmtliche s positive ganze Zahlen aufsteigend geordnet, so lässt sich das summatorische Glied der Reihe auf folgende Weise finden. Man setze**

$$u_n = \frac{A_1}{(n+a)(n+a+1)} + \dots + \frac{A_{s_1}}{(n+a+s_1-1)(n+a+s_1)} + \dots\dots$$
$$\dots\dots + \frac{A_{s_{r-1}}}{(n+a+s_{r-1}-1)(n+a+s_{r-1})} + \dots + \frac{A_{s_r}}{(n+a+s_r-1)(n+a+s_r)}$$

ordne diese Gleichung nach den Potenzen von n und setze sämmtliche Coefficienten $= 0$, so erhält man die nöthige Anzahl linearer Gleichungen zur unzweideutigen Bestimmung der Grössen $A_1, A_2 \dots\dots A_{s_r}$.

Es ist nun $\sum\limits_1^n u_n = \sum\limits_{m=1}^{s_r} \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{A_m}{(n+a+m-1)(n+a+m)}$ und

$$\sum_{n=1}^{n} \frac{A_m}{(n+a+m-1)(n+a+m)} = A_m \left(\frac{1}{a+m} - \frac{1}{n+a+m}\right)$$

Ist diese Methode noch anwendbar, wenn im Nenner von u_n gleiche Faktoren vorkommen?

41) $S_n = \frac{n(n+1)}{2(4a^2+1)(4a^2+(2n+1)^2)}$ 42) $S_n = \frac{n^2}{a^2(a^2+n^2)}$

43) $S_n = \frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{(na^2+2n^2+2n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2}$

44) $S_n = \frac{(4a^2-2n-1)n}{(4a^2+2n^2+2n+1)^2 - 4n^2(n+1)^2}$

45) $S_n = \frac{b}{1-q}\left[a(1-q^n) - ndq^n + dq\frac{(1-q^n)}{1-q}\right]$

47) $\frac{1-nx^n}{1-x} + x\frac{1-x^{n-1}}{(1-x)^2} + \frac{1-(2n-1)\left(\frac{x}{2}\right)^n}{1-\frac{x}{2}} + \frac{1-\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}$

48) Es ist $1 + \frac{2.3}{1.2}x + \frac{3.4}{1.2}x^2 + \dots\dots + \frac{n(n+1)}{1.2}x^{n-1} =$

$$[1+2x+3x^2+\dots+nx^{n-1}] + x[1+2x+\dots(n-1)x^{n-2}] +$$
$$+ x^2[1+2x+\dots+(n-2)x^{n-3}] + \dots + x^{n-1}$$
$$= \frac{1}{(1-x)^3} - \frac{x^n}{(1-x)^3} - \frac{n}{1}\cdot\frac{x^n}{(1-x)^2} - \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{x^n}{1-x}$$

49) $1 + \frac{2.3.4}{1.2.3} x + \frac{3.4.5}{1.2.3} x^2 + \ldots\ldots + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} x^{n-1} =$

$$= \left[1 + \frac{2.3}{1.2} x + \frac{3.4}{1.2} x^2 + \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2} x^{n-1}\right] +$$

$$+ x\left[1 + \frac{2.3}{1.2} x + \ldots + \frac{(n-1)n}{1.2} x^{n-2}\right] + x^2\left[1 + \ldots\right] + \ldots + x^{n-1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^4} - \frac{x^n}{(1-x)^n} - \frac{n x^n}{(1-x)^3} - \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^2} -$$

$$- \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \cdot \frac{x^n}{1-x}$$

50) $S = \frac{1}{(1-x)^k} - \frac{x^n}{(1-x)^k} - \frac{n}{1} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^{k-1}} -$

$$- \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{x^n}{(1-x)^{k-2}} - \ldots - \frac{n(n+1)\ldots(n+k-2)}{1.2.3\ \ldots.\ (k-1)} \cdot \frac{x^n}{1-x}$$

51) $S = a^m \frac{x^{mn} - 1}{x^m - 1}$ 52) $S_n = \frac{1}{2} \cot x - \frac{\cos(2n+1)x}{2 \sin x}$

53) $S_n = \frac{1}{4} \left\{ \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x-y)}{\sin \frac{x-y}{2}} + \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x+y)}{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)} - 2 \right\}$

54) $S_n = \operatorname{tang} 2^n x - \operatorname{tang} x$ 55) $S_n = \frac{2n-1}{4} + \frac{\sin(2n+1)x}{4 \sin x}$

56) Da $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$, so convergirt die Reihe. *)

57) conv. 58) div. 59) div. 60) conv. 61) conv. 62) conv. 63) div. 64) div. 65) conv. 66) conv. oder div., jenachdem $a \lesseqgtr c$. 67) conv. 68) div. 69) conv. für $a > 1$; div. für $a \leqq 1$. 70) conv. für jeden Werth von x. 71) div. 72) conv. 73) conv. für beliebige x. 74) div. für beliebige x 75) conv. für jedes x. 76) div. für beliebige x. 77) **) bis 83) div. 84) conv. für $m > 0$, div. für $m \leqq 0$. 85) bis 87) div.

88) Da $\lim n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \sqrt{\frac{3}{2}} > 1$, so conv. die Reihe. ***)

89) und 90) conv. 91) bis 96) conv. 97) div. 98) conv. für alle von Null verschiedene x. 99) und 100) conv. 101) conv., wenn $a + b > 1$. 102) conv. 103) conv. für $m + p + 1 > 0$. 104) conv. für $a > 1$. 105) bis 107) conv. 108) div. 109) conv. 110) conv. für $x + 1 > m$.

*) Schlömilch's Handb. d. a. A. §. 24.

**) Man findet den Beweis des angegebenen Themas in Schlömilch's Handb. §. 25.

***) Schlömilch's Handb. d. a. A. §. 26.

111) Da $lim \left[n\,l\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)\right] = \frac{2}{3} < 1$, so divergirt die Reihe.*)

112) div. 113) conv. 114) bis 116) div. 117) bis 119) conv.

120) Wenn die Grenze des Ausdruckes $\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{l\,n}$ grösser als die Einheit ist, so muss derselbe von einem gewissen Werthe des n an bis ins Unendliche grösser bleiben als eine zwischen der Grenze und der Einheit liegende Zahl α. Hieraus folgt aber $u_n < \frac{1}{n^\alpha}$ und da die Reihe, deren allgemeines Glied $\frac{1}{n^\alpha}$ ist, unter der hier erfüllten Voraussetzung $\alpha > 1$ convergirt, so convergirt auch die vorgelegte Reihe. Wäre dagegen $lim \frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{l\,n} < 1$, so fände man $u_n > \frac{1}{n^\beta}$ und $\beta < 1$, wesshalb sowohl die Hilfsreihe als auch die ursprüngliche divergiren würde. — Für das vorliegende Beispiel ist $lim \frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{l_n} = \frac{1}{2} < 1$, die Reihe daher divergent.

121) conv. 122) div. 123) bis 129) conv.

130) Da $lim \left\{ n\,l\,n - (n+1)\,l\,(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_n}\right\} = -\frac{1}{2} < 0$, so divergirt die Reihe.**)

131) div. 132) div. 134) conv. 135) conv., wenn $x > 0$.
136) div. 137) conv., wenn $\cos x > 0$.

139) ***) Wenn $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n^2}$, so convergirt oder divergirt die Reihe, jenachdem $\alpha <$ oder > 1 ist, und für $\alpha = 1$ nur dann, wenn $\beta > 1$. Denn es ist $lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$ und wenn $\alpha = 1$: $lim\, n\left(1 - \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \beta$, und wenn auch $\beta = 1$ sein sollte: $lim \left[n\,l\,n - (n+1)\,l(n+1)\frac{u_{n+1}}{u_u}\right] = -1$.

---

*) Schlömilch's Handb. d. a. A. § 26.

**) Schlömilch's Handb. d. a. A. § 27.

***) Schlömilch, „Notiz über die Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen" in Schlömilch's Zeitschrift für Mathem. u. Physik. 5. Heft. Siehe auch: Kummer, „Ueber die Conv. und Diverg. der unendlichen Reihen" in Crelle's Journal für reine und angewandte Mathem., 13. Band, 2. Heft, und Weierstrass, „Ueber die Theorie der analytischen Fakultäten" im 1. Hefte des 51. Bandes desselben Journals.

Im vorliegenden Beispiele ist $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{5}{2n} + \ldots$ und die Reihe desshalb convergent.

140) div. 141) bis 145) conv. 146) div. 147) conv.

148) 149) 150) Um für jede dieser Reihen den Quotienten $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ auf die verlangte Form zu bringen, benütze man die Ungleichheiten

$$x - \frac{x^3}{4} < \sin x < x \text{ und } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1,$$

welche sich auf folgende einfache Weise ableiten lassen:

In der bekannten Formel $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = 2 \operatorname{tang} \frac{x}{2} \left(1 - \sin^2 \frac{x}{2}\right)$ setze man im rechten Theile an die Stelle von $\sin \frac{x}{2}$ und $\operatorname{tang} \frac{x}{2}$ die zugehörigen Bögen, so wird die Gleichheit (wegen $\sin x < x < \operatorname{tang} x$ für jedes zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegende x) gestört und übergeht in die Ungleichheit $\sin x > x - \frac{x^3}{4}$. Auf dieselbe Weise erhält man aus der Formel $\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ die Ungleichheit $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ etc. Von den 3 Reihen ist die erste convergent, die beiden andern sind divergent.

241) Es ist $u_n = \frac{1.6}{2.5} \cdot \frac{3.7}{3.6} \cdot \frac{3.8}{4.7} \cdots \frac{n(n+5)}{(n+1)(n+4)} = \frac{n+5}{5(n+1)}$,

daher $S_{2n} = \frac{4}{5}\left(\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n}\right)$ und

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2.3} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{6.7} + \ldots + \frac{1}{2n(2n+1)}\right).$$

Die eingeklammerten Reihen sind convergent, demnach ist sowohl *lim* S_{2n} als auch *lim* S_{2n+1} eine endliche Grösse und die Differenz beider Grenzwerthe ist *lim* $u_{2n} = \lim \frac{2n+5}{5(2n+1)} = \frac{1}{5}$.

253) Es sei $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \ldots$

und $s = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, dann lässt sich S als Grenzwerth von

$$S_n = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \ldots \left(\frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-5} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right)$$

und s als Grenzwerth von

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\ldots \left(\frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n-4}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{6n-3} - \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n-1} - \frac{1}{6n}\right)$$

betrachten. Die Differenz beider Gleichungen gibt

$$S_n - s_n = \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} - \frac{1}{6}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{6n+4} + \frac{1}{6n-2} + \frac{1}{6n}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n}\right) = \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+4} + \ldots + \frac{1}{6n-4}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \ldots + \frac{1}{3n-2}\right)$$

woraus folgt, dass $S_n - s_n$ sich einer zwischen $\frac{1}{6}$ und $\frac{1}{4}$ liegenden Grenze nähere, und dass demnach die abgeleitete Reihe nicht dieselbe Summe wie die ursprüngliche besitze.

257) Sämmtliche Glieder der Reihe als positiv vorausgesetzt, ist $l(u_0 + \ldots + u_n) - l(u_0 + \ldots + u_{n-1}) < \frac{u_n}{u_0 + \ldots + u_{n-1}}$, dagegen $l(u_0 + \ldots + u_n) - l(u_0 + \ldots + u_{n-1}) =$

$$= -l\left(1 - \frac{u_n}{u_0 + \ldots + u_n}\right) > \frac{u_n}{u_0 + \ldots + u_n} \ldots\ldots \text{ etc.}$$

259) Man überzeugt sich leicht, dass

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{k-1} < (k-1)\,u_1, \quad \text{dagegen} > \frac{k-1}{k} \cdot k u_k$$
$$u_k + u_{k+1} + \ldots + u_{k^2-1} < (k-1)\,k u_k \quad \text{,,} \quad > \frac{k-1}{k} \cdot k^2 u_{k^2}$$
$$u_{k^2} + u_{k^2+1} + \ldots + u_{k^3-1} < (k-1)\,k^2 u_{k^2} \quad \text{,,} \quad > \frac{k-1}{k} \cdot k^3 u_{k^3}$$

und daher $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots\ldots < (k-1)(u_1 + k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots\ldots)$

$$> \frac{k-1}{k}(k u_k + k^2 u_{k^2} + \ldots\ldots) \text{ etc.}$$

Für $k = 2$ erhält man als speciellen Fall das auf pag. 25 angegebene Theorem.

260) Aus $\lim \left(\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{n}\right) \gtrless 0$ folgt $\lim u_n^{\frac{1}{n}} = g \lessgtr 1$. Behält man das obere Zeichen bei, so wird, von einem gewissen Werthe des n an, bis ins Unendliche $u_n^{\frac{1}{n}}$ kleiner sein, als eine zwischen g und 1 liegende Zahl α, also $u_n^{\frac{1}{n}} < \alpha$, $u_{n+1}^{\frac{1}{n+1}} < \alpha$, $u_{n+2}^{\frac{1}{n+2}} < \alpha$ etc., daher auch

$u_n + u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots\ldots < \alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots\ldots$ und die zu untersuchende Reihe convergiren. Bricht man die Reihe mit dem Gliede u_{n-1} ab, so ist der begangene Fehler kleiner als $\alpha^n + \alpha^{n+1} + \alpha^{n+2} + \ldots\ldots$ $= \frac{\alpha^n}{1-\alpha}$. Ist $g > 1$, so ersieht man leicht, dass, von einem gewissen Werthe des n an, ohne Unterbrechung die Glieder der Reihe über den entsprechenden einer divergenten geometrischen Progression liegen, und dass desshalb die vorgelegte Reihe selbst divergirt. Das Kennzeichen entscheidet nichts, wenn $g = 1$, also $lim\left(\frac{l\left(\frac{1}{u_n}\right)}{n}\right) = 0$ ist. In diesem Falle wende man die eben entwickelte Regel auf die Reihe $u_1 + v u_v + v^2 u_{v^2} + v^3 u_{v^3} + \ldots.$ an, welche (nach 259) mit $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.$ gleichzeitig convergirt oder divergirt, wodurch man als zu betrachtenden Grenzwerth findet: $lim\left(\frac{l\left(\frac{1}{v^m\, u_{v^m}}\right)}{m}\right)$. Dieser Ausdruck übergeht für $v^m = n$ in $lim\left(\frac{l\left(\frac{1}{n\, u_n}\right)}{l n}\right).\, l v$ und ist demnach mit $lim\left(\frac{l\left(\frac{1}{n\, u_n}\right)}{l n}\right)$ übereinstimmend positiv oder negativ; also convergirt die ursprüngliche Reihe, wenn $A_2 = lim\left(\frac{l\left(\frac{1}{n\, u_n}\right)}{l n_n}\right) > 0$ und divergirt, wenn $A_2 < 0$ ist.

Wenn $A_2 = 0$, so bilde man den Ausdruck $\frac{l\left(\frac{1}{n\, u_n}\right)}{l n}$ für die Reihe $u_1 + v u_v + v^2 u_{v^2} + \ldots.$, indem man $v^m = n$ setzt. Man findet ohne Mühe, dass derselbe mit $\frac{l\left(\frac{1}{n\, l n . u_n}\right)}{l l n}$ sich einer und derselben Grenze nähere, und dass also die Reihe convergirt oder divergirt, jenachdem diese Grenze grösser oder kleiner als 0 ist. Wie man zu verfahren habe, wenn $A_3 = lim\left(\frac{l\left(\frac{1}{n\, l n\, u_n}\right)}{l l n}\right) = 0$, ergiebt sich aus dem Vorhergehenden von selbst.

261) Wenn $lim\; n\, u_n$ nicht Null ist, so kann auch $lim\,(u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots)$ nicht Null sein, und wenn $lim\; n^h\, u_n$ endlich ist, so sind, von einem gewissen Werthe des n an, die Glieder der zu untersuchenden Reihe kleiner,

als jene der convergenten Reihe $\frac{g}{n^h} + \frac{g}{(n+1)^h} + \frac{g}{(n+2)^h} + \ldots$ (g eine beliebig grosse aber endliche Zahl).

262) Durch Vergleichung mit Reihen, deren allgemeine Glieder beziehungsweise sind:

$$\frac{1}{n(l\,n)^h} \text{ und } \frac{1}{n\,l\,n}$$

$$\frac{1}{n\,l\,n(l_2 n)^h} \text{ und } \frac{1}{n\,l\,n\,l_2\,n} \text{ etc.,}$$

und welche bezüglich ihrer Convergenz oder Differgenz mittelst des in 259) angegebenen Theorems geprüft werden können, zu beweisen.

264) Es sei $lim \frac{\log_r n}{\log_r (n+1) - \log_r n} \cdot \alpha_r = g > 1$, dann muss, von einem gewissen Werthe des Stellenzeigers an, ohne Unterbrechung $\frac{\log_r n \,.\, \alpha_r}{\log_r (n+1) - \log_r n}$ grösser sein, als eine zwischen g und 1 liegende Zahl h, welche man als Grenzwerth des Ausdruckes $\frac{(1+\delta)^h - 1}{\delta}$ (wobei $\delta = \frac{\log_r (n+1) - \log r_r n}{\log_r n}$) für $n = \infty$ ansehen kann, hieraus folgt aber $1 + \alpha_r > \left[\frac{\log_r n}{\log_r (n+1)}\right]^h$ und ferner

$$\frac{u^{n+1}}{u_n} < \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{\log (n+1)}{\log n} \cdots\cdots \frac{\log_{r-1}(n+1)}{\log_{r-1}(n)}\left[\frac{\log_r (n+1)}{\log_r n}\right]^h}$$

d. h. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ist kleiner als der Quotient der zwei aufeinander folgenden Glieder $\frac{1}{n \log n \ldots (\log_r n)^h}$ und $\frac{1}{(n+1)\log(n+1) \ldots (\log_r (n+1))^h}$ einer convergirenden Reihe; die zu untersuchende Reihe ist demnach selbst convergent. Auf ähnliche Weise beweiset man, dass die zu untersuchende Reihe für $g < 1$ und auch $g = 1$ divergirt, wenn in diesem letzteren Falle der Ausdruck seinen Grenzwerth g durch Zunahme erreicht. *)

265) Wir setzen die Gleichung 1) $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\,l\,n} + \ldots + \frac{k}{n\,l\,n \ldots l_r n} + \frac{1}{\delta n^2}$ $= \left(\frac{n+1}{n}\right)\frac{l(n+1)}{l\,n} \ldots \left[\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right]^k$, in welcher k eine positive Zahl bedeutet und δ nicht unendlich klein wird für $n = \infty$, vorläufig als bewiesen

*) Selbstverständlich wird man bei einer Anwendung dieser Regel auf Beispiele, r successive die Werthe 1, 2, 3 .... annehmen lassen, und zu einem höheren Werthe erst dann schreiten, wenn der niedere zu einem über die Convergenz oder Divergenz nicht entscheidenden Ausdruck führt.

voraus, und nehmen an, dass $g > 1$ der Grenzwerth des Ausdruckes $n . l n \ldots . l_r n \alpha_r$ sei. In diesem Falle wähle man eine positive Zahl k so, dass $g > k + \frac{l n l_2 n \ldots l_r n}{\delta n^2}$, was immer möglich ist, da das zweite Glied des rechten Theiles die Grenze Null besitzt. Für hinreichend grosse n wird nun ohne Unterbrechung $n l n l_2 n \ldots . l_r n \alpha_r > k + \frac{l n l_2 n \ldots l_r n}{\delta n}$ also $\alpha_r > \frac{k}{n l n l_2 n \ldots . l_r n} + \frac{1}{\delta n^2}$ und $1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n l n} + \ldots . \frac{1}{n l n l_2 n \ldots l_{r-1} n}$ $+ \alpha_r > 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n l n} + \ldots . + \frac{1}{n l n \ldots l_{r-1} n} + \frac{k}{n l n l_2 n \ldots l_r n} + \frac{1}{\delta n^2}$

Mit Rücksicht auf 1) hat man nun:

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n l n} + \ldots + \frac{1}{n l n \ldots l_{r-1} n} + \alpha_r} < \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right) \frac{l(n+1)}{l n} \cdot \frac{l_2(n+1)}{l_2 n} \ldots \left[\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right]^k}$$

d. h. der Quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ der zu untersuchenden Reihe ist kleiner als der entsprechende Quotient einer convergenten Hilfsreihe, wodurch die Convergenz der Reihe nachgewiesen ist. Ebenso leicht überzeugt man sich von der Divergenz der Reihe für den Fall, dass der Grenzwerth g kleiner als 1 ist. Es erübrigt nur noch, die Ableitung der Gleichung 1) wenigstens anzudeuten. Zu diesem Zwecke setzen wir den Ausdruck $\frac{l_2(n+1)}{l_2 n} = 1 + \frac{1}{y}$, woraus $\left[\frac{l(n+1)}{l(n)}\right]^y = l n$ folgt. Da aber der Ausdruck

$$\frac{l(n+1)}{l n} = 1 + \frac{l\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{l n} = 1 + \frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta n^2 l n} = 1 + \frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2} \text{ *)}$$

(wobei $\beta_1 = \beta l n$), so ist ferner $\left[\frac{l(n+1)}{l n}\right]^y = \left[1 + \frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\right]^y = l n$;

$$\text{also } y l \left[1 + \left(\frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\right)\right] = l_2 n$$

$$y \left[\frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2} + \frac{1}{\beta_2} \left(\frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}\right)^2\right] = l_2 n \text{ und endlich}$$

$$y \left[\frac{1}{n l n} + \frac{1}{\beta_3 n^2}\right] = l_2 n \text{ (wenn } \beta_3 = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{(\beta_2 l n)^2} + \frac{2}{\beta_1 \beta_2 n l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}$$

gesetzt wird). Aus dieser Gleichung erhält man nun:

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{n l n l_2 n} + \frac{1}{\beta_3 n^2 l^2 n} = \frac{1}{n l n l_2 n} + \frac{1}{\beta_4 n^2}, (\beta_4 = \beta_3 l^2 n \text{ gesetzt) und hiemit:}$$

*) Es ist nämlich $l\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{\beta n^2}$.

$\frac{l_2(n+1)}{l_2 n} = 1 + \frac{1}{n\, l n\, l_2 n} + \frac{1}{\beta_4 n^2}$. Mit Hilfe dieser Gleichung wird man durch Fortsetzung des obigen Verfahrens auch leicht $\frac{l_3(n+1)}{l_3 n}$ und überhaupt successive $\frac{l_4(n+1)}{l_4 n}, \ldots \frac{l_r(n+1)}{l_r n}$ transformiren können, und zwar findet man $\frac{l_r(n+1)}{l_r n} = 1 + \frac{1}{n\, l n\, l_2 n \ldots l_r n} + \frac{1}{\varepsilon n^2}$, wobei ε eine Zahl ist, welche vermöge ihrer Entstehung nicht Null wird, wenn n ins Unendliche wächst. Mit Hilfe des Grenzwerthes $lim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^k - 1}{\frac{1}{n}} = k$ überzeugt man sich ferner leicht von der Richtigkeit der Gleichung $\left(1+\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \frac{k}{n} + \frac{1}{\gamma n^2}$, in welcher γ eine nicht näher bestimmte Zahl bezeichnet, von welcher man aber weiss, dass sie nicht Null wird für $n = \infty$, und nun hat es keine Schwierigkeit, die Gleichung $\left[\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right]^k = 1 + \frac{1}{n\, l n \ldots l_r n} + \frac{1}{\gamma' n^2}$ nachzuweisen. Durch Multiplication der Gleichungen $\frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, $\frac{l(n+1)}{l n} = 1 + \frac{1}{n\, l n} + \frac{1}{\beta_1 n^2}$, $\frac{l_2(n+1)}{l_2 n} = 1 + \frac{1}{n\, l n\, l_2 n} + \frac{1}{\beta_3 n^2}, \ldots \left[\frac{l_r(n+1)}{l_r n}\right]^k = 1 + \frac{k}{n\, l n \ldots l_r n} + \frac{1}{\gamma' n^2}$ erhält man die Eingangs angegebene Gleichung.

Zu VI.

1) Die Summe der convergirenden Horizontalreihen, deren Glieder durchgehends dasselbe Vorzeichen besitzen, bilden selbst eine convergente Reihe, die Doppelreihe ist demnach selbst convergent *) und ihre Summe ist 2.

2) u. 3) div. 4) conv. 5) div. 6) bis 9) conv. 10) div. 11) bis 13) conv. 14) bis 18) div. 19) div. 20) div. (Die Summen der Horizontalreihen bilden zwar eine convergente, die Summen der Vertikalreihen dagegen eine oscillirende Reihe.)

21) div. (Das Summenglied der ersten Horizontalreihe ist $\operatorname{arctang}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)$.

*) Siehe Schlömilch's Handb. d. a. A. § 33.

22) div. 23) conv., wenn $-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$. 24) div. 25) conv. für $-1 < x < +1$. 26) conv., wenn $-1 < x < +1$ und $-1 < a < +1$. 27) conv. für beliebige x. 28) div. für jedes von Null verschiedene x; denn die Summen der Horizontalreihen bilden die Reihe $\operatorname{arctang} x + \operatorname{arctang} \frac{x}{2} + \operatorname{arctang} \frac{x}{3} + \ldots$

Zu VII.

A) Eine Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$. heisst eine recurrente, rücklaufende oder wiederkehrende der r^{ten} Ordnung, wenn a_n mit den r vorhergehenden Coefficienten $a_{n-1}, \ldots\ldots a_{n-r}$ durch die lineare Gleichung: 1) $a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_r a_{n-r} = 0$ verbunden ist, in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_r$ gegebene Constanten bezeichnen, die, mit entgegengesetztem Vorzeichen genommen, die Beziehungs- oder Relationsscala heissen. *)

Es ist nicht schwer, die Summenformel einer recurrenten Reihe zu entwickeln. Denn ist für eine solche der r^{ten} Ordnung

$$S_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_{n-1} x^{n-1},$$

so hat man blos diese Gleichung successive mit $\alpha_1 x, \alpha_2 x^2, \ldots\ldots \alpha_r x^r$ zu multipliciren, dann sämmtliche Gleichungen zu addiren und zu beachten, dass keine Potenzen von x, deren Exponent zwischen $r-1$ und n liegt, vermöge der Gleichung 1) vorkommen können, um zu finden:

$$S_n (1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots + \alpha_r x^r) = A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_{r-1} x^{r-1}$$
$$- (B_0 + B_1 x + \ldots\ldots + B_{r-1} x^{r-1}) x^n$$

$$2)\ S_n = \frac{A_0 + A_1 x + \ldots\ldots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \ldots\ldots + \alpha_r x^r} - \frac{B_0 + B_1 x + \ldots\ldots + B_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots\ldots \alpha_r x^r} \cdot x^n,$$

wobei zur Abkürzung: 3) $a_0 = A_0,\ a_1 + \alpha_1 a_0 = A_1,\ a_2 + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_0 = A_2$

$$a_{r-1} + \alpha_1 a_{r-2} + \alpha_2 a_{r-3} + \ldots\ldots + \alpha_{r-1} a_0 = A_{r-1}$$

und 4) $-B_0 = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_r a_{n-r}$

$$-B_1 = \alpha_2 a_{n-1} + \alpha_3 a_{n-2} + \ldots\ldots + \alpha_r a_{n-r} \text{ etc.}$$

gesetzt wurde. Vermöge der Gleichungen 4) und 1) ist aber auch:

$$-B_0 + a_n = 0,\ -B_1 + a_{n+1} + \alpha_1 a_n = 0,$$
$$-B_2 + a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_n = 0 \text{ etc.}$$

und daher

$$B_0 = a_n,\ B_1 = a_{n+1} + \alpha_1 a_n,\ B_2 = a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_n \text{ etc.},$$

woraus man ersieht, dass die Grössen $B_0\ B_1 \ldots\ldots$ aus $a_n, a_{n+1} \ldots\ldots$ genau so gebildet werden, wie $A_0, A_1, \ldots\ldots$ aus $a_0, a_1, \ldots\ldots$ Aus S_n erhält man die Summe, oder die erzeugende Funktion der unendlichen Reihe, wenn man n ins Unendliche wachsen lässt und den Grenzwerth des Aus-

*) Die Gleichung 1) pflegt auch wohl die charakteristische Gleichung der recurrenten Reihe genannt zu werden.

druckes bestimmt. Dieser Grenzwerth ist aber für alle innerhalb der Convergenzgrenzen liegende x der rationale Bruch

$$\frac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_r x^r};$$

denn das zweite Glied im rechten Theile der Summenformel (2) convergirt unter dieser Voraussetzung gegen die Null. Um diese Behauptung ganz allgemein zu beweisen, bezeichne [z] den Zahlwerth der Zahl z und sei $B'_s = [a_{n+s}] + [\alpha_1][\alpha_{n+s-1}] + \ldots [\alpha_s][a_n]$; so ist $[B_s] \leqq B'_s$, $[B_0 + B_1 x + \ldots + B_{r-1} x^{r-1}] \leqq B'_0 + B'_1 [x] + \ldots + B'_{r-1} [x^{r-1}]$ und $B'_0 < B'_1 < B'_2 < \ldots < B'_r$, woraus weiter

$$[B_0 + B_1 x + \ldots + B_{r-1} x^{r-1}] < B'_{r-1} (1 + [x] + \ldots [x^{r-1}]) = B'_{r-1} \left(\frac{1 - [x^r]}{1 - [x]}\right)$$

folgt. Der Ausdruck $\frac{B_0 + B_1 x + \ldots + B_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_r x^r} x^n$ convergirt nun sicher gegen Null, wenn dasselbe mit $B'_{r-1} [x]^n = [\alpha_r a_{n-1}] [x]^n$ der Fall ist, und diess Letztere tritt immer ein, wenn $\lim [a_{n-1}] [x]^{n-1} = \lim (\sqrt[n-1]{[a_{n-1}]} \cdot [x])^{n-1} = 0$, also $\lim \sqrt[n-1]{[a_{n-1}]} \cdot [x] < 1$ ist. Diese letztere Bedingung ist aber die der Convergenz der Reihe. *)

„Die erzeugende Funktion einer convergenten recurrenten Reihe der r^{ten} Ordnung ist also eine rationale echtgebrochene Funktion, deren Nenner ebenfalls von der r^{ten} Ordnung ist.“ Und umgekehrt:

„Jede rationale echtgebrochene Funktion kann als die Summe einer recurrenten Reihe von der r^{ten} Ordnung angesehen werden.“

Durch die Gleichung 1) ist das allgemeine Glied a_n blos in recurrirender Form gegeben; die Zerlegung echtgebrochener Funktionen in Partialbrüche als bekannt vorausgesetzt, kann man dasselbe auf folgende Weise auch in dependenter Form darstellen. Ist nämlich

$$\frac{A_0 + A_1 x + \ldots A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_r x^r}$$

der Summenbruch einer recurrenten Reihe, so lässt sich dieser als eine Summe von Brüchen darstellen, welche in einer der beiden Formen $\frac{C}{(1 - c x^m}$ oder $\frac{D x + E}{[(x - d)^2 + e^2]^m}$ (m positiv und ganz) enthalten sind. Betrachtet man diese einzelnen Brüche selbst als erzeugende Funktionen

*) Wenn nämlich für die nur positive Glieder enthaltende Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + \ldots \lim \sqrt[n-1]{u_{n-1}} = \alpha < 1$$

ist, so liegen deren Glieder von einem gewissen n an unter jenen einer convergenten geometrischen Progression. Im vorliegenden Falle ist $u_{n-1} = [a_{n-1}]^{n-1}$.

rücklaufender Reihen, und bestimmt deren allgemeine Glieder, so ist das Aggregat dieser Glieder das allgemeine Glied der ursprünglichen Reihe. Was nun zunächst die dem Bruche

$$\frac{C}{(1-cx)^m} = \frac{C}{1-(m)_1 cx + (m)_2 c^2 x^2 - \ldots \pm c^m x^m}$$

entsprechende Reihe anbelangt, so ist dieselbe von der m^{ten} Ordnung, ihre Relationsskala ist $+(m)_1 c, -(m)_2 c^2, \ldots \mp c^m$, und man findet aus den Gleichungen 3) wenn man in denselben für $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ die entsprechenden Werthe, ferner $A_0 = C$ und $A_1 = A_2 = \ldots = A_{r-1} = 0$ setzt, für $a_0, a_1, a_2 \ldots$ successive die Werthe: $a_0 = C$, $a_1 = (m)_1 Cc$, $a_2 = ((m)_1^2 - (m)_2) Cc^2 = (m+1)_2 Cc^2$, $a_3 = [(m)_1 (m+1)_2 - (m)_2 (m)_1 + (m)_3] Cc^3 = (m+2)_3 Cc^3$ etc., aus welchen man schliesst, dass $a_n = (m+n-1)_n Cc^n$ sein müsse, wovon man sich auch leicht durch den Schluss von n auf n + 1 überzeugen kann.

Nicht so einfach ist das allgemeine Glied der dem Bruche $\frac{Dx+E}{[(x-d)^2+e^2]^m}$ entsprechenden Reihe zu bestimmen. Für den besondern Fall $m = 1$ findet man die Lösung in No. 8).

1) Den Bruch in Partialbrüche zerlegt findet man:

$$\frac{1+x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+x} + \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}}{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}-x} =$$

$$= \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}}}{1+\frac{2x}{1+\sqrt{5}}} - \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})\sqrt{5}}}{1+\frac{2x}{1-\sqrt{5}}};$$

daher ist $a_n = \frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})\sqrt{5}} \cdot \frac{(-2)^n}{(1+\sqrt{5})^n} - \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})\sqrt{5}} \cdot \frac{(-2)^n}{(1-\sqrt{5})^n}$.

$$= \frac{(-2)^n}{\sqrt{5}} \left\{ \frac{1-\sqrt{5}}{(1+\sqrt{5})^{n+1}} - \frac{1+\sqrt{5}}{(1-\sqrt{5})^{n+1}} \right\}.$$

Die Reihe convergirt für $-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$

3) $a_n = \frac{(1+\sqrt{5})^{n+1}}{2} + \frac{(1-\sqrt{5})^{n+1}}{2}$

4) $\frac{\frac{2}{3}}{1+x} + \frac{\frac{1}{3}}{1-2x}$; $a_n = \frac{2^n \pm 2}{3}$. Conv. für $x^2 < 4$.

5) $\dfrac{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}}}{2-\sqrt{5}+x} + \dfrac{\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}}}{2+\sqrt{5}+x}$,

6) $a_n = 2.3^n - 2^n$

7) $\dfrac{\frac{1}{4}}{1-x} + \dfrac{\frac{1}{4}}{1+x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{(1-x)^2}$ $\quad a_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{(-1)^n}{4} + \dfrac{n+1}{2}$

8) bis 11) Zerlegt man den Bruch $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = \dfrac{1}{(1-x)^3(1+x)(1+x+x^2)}$ in Partialbrüche, so findet man denselben gleich $\dfrac{1}{6(1-x)^3} + \dfrac{1}{4(1-x)^2} + \dfrac{17}{72(1-x)} + \dfrac{1}{8(1+x)} + \dfrac{2+x}{9(1+x+x^2)}$. Von diesen Brüchen liefert zu a_n der erste $\frac{1}{6}(n+2)_2$, der zweite $\frac{1}{4}(n+1)$, der dritte $\frac{17}{72}$, der vierte $\frac{1}{8}(-1)^n$. Was aber den Bruch $\dfrac{\frac{2}{9}+\frac{x}{9}}{1+x+x^2}$ anbelangt, der sich nicht weiter auf reelle Weise zerlegen lässt, so ist derselbe in der allgemeinen Form $\dfrac{M+Nx}{(x-d)^2+e^2}$ enthalten, welche sich durch die Substitution $d = \frac{1}{p}\cos\varphi$, $e = \frac{1}{p}\sin\varphi$, $Mp^2 = A$, $Np = B$ in $\dfrac{A+Bpx}{1-2px\cos\varphi+p^2x^2}$ verwandelt. Dieser letzte Quotient ist die Summe der beiden Ausdrücke $(A\cot\varphi + B\operatorname{cosec}\varphi)\cdot\dfrac{px\sin\varphi}{1-2px\cos\varphi+p^2x^2}$ und $A\cdot\dfrac{1-px\cos\varphi}{1-2px\cos\varphi+p^2x^2}$, welche recurrirende Reihen liefern, deren allgemeine Glieder sind:

$$(A\cot\varphi + B\operatorname{cosec}\varphi)\sin n\varphi\,.\,p^n x^n \text{ und } A\cos n\varphi\,.\,p^n x^n.$$

Also ist die Summe dieser beiden: $\dfrac{A\sin(n+1)\varphi + B\sin n\varphi}{\sin\varphi}\cdot p^n x^n$ das allgemeine Glied der dem Bruche $\dfrac{A+Bpx}{1-2px\cos\varphi+p^2x^2}$ entsprechenden Reihe. Im vorliegenden Beispiele hat man nun, um den Bruch $\dfrac{\frac{2}{9}+\frac{x}{9}}{1+x+x^2}$ mit $\dfrac{A+Bpx}{1-2px\cos\varphi+p^2x^2}$ in Uebereinstimmung zu bringen, $-2p\cos\varphi = 1$, $p=-1$, $A=\frac{2}{9}$, $B=-\frac{1}{9}$ zu setzen. Hierdurch wird $\varphi = \frac{\pi}{3}$ und

das gesuchte allgemeine Glied $= \dfrac{4 \sin (n+1)\frac{\pi}{3} - 2 \sin \frac{n\pi}{3}}{9\sqrt{3}} (-1)^n x^n$.

Die Summe der gefundenen allgemeinen Glieder ist das allgemeine Glied der aus dem Bruche $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ entspringenden Reihe. (Man berechne noch a_n für $n = 6m,\ 6m+1,\ 6m+2,\ 6m+3,\ 6m+4,\ 6m+5$).

12) $a_n = \frac{3}{4} n + 1,\ \frac{3}{4} n + \frac{5}{4},\ \frac{3}{4} n + \frac{3}{2},\ \frac{3}{4} n + \frac{3}{4}$, je nachdem $n = 4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3$.

13) $= \dfrac{1-5x+8x^2}{\sqrt{x}(1-3x)^2(1-2x)}$; $a_n = \frac{1}{3}(2n-3)\,3^n + 2^{n+1}$.

14) Man setze $\sqrt{x} = y$.

16) bis 32) Eine recurrente Reihe r^{ter} Ordnung ist durch 2r Folgeglieder bestimmt. Zur Bestimmung von a_{2r} hat man folgende Gleichungen

$$\begin{array}{l} a_r \quad + \alpha_1 a_{r-1} + \alpha_2 a_{r-2} + \ldots + \alpha_r a_0 = 0 \\ a_{r+1} + \alpha_1 a_{r-1} + \alpha_2 a_{r-2} + \ldots + \alpha_r a_1 = 0 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{2r} \quad + \alpha_1 a_{2r-1} + \alpha_2 a_{2r-2} + \ldots + \alpha_r a_r = 0 \end{array}$$

aus welchen durch Elimination von $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ folgt:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_r \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{r+1} \\ \vdots & & \\ a_r & a_{r+1} & \ldots a_{2r} \end{vmatrix} = 0.$$

Für a_{2r+1} erhält man ebenso

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_{r+1} \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{r+2} \\ \vdots & & \\ a_{r+1} & a_{r+2} & \ldots a_{2r+1} \end{vmatrix} = 0.$$

In 16) ist demnach a_4 zu bestimmen aus

$$\begin{vmatrix} 1, & 3, & 4 \\ 3, & 4, & 7 \\ 4, & 7, & a_4 \end{vmatrix} = 4(3.7 - 4^2) + 7(4.3 - 1.7) + a_4(1.4 - 3^2) = 0,$$

woraus $a_4 = 11$ folgt.

22) $1200x^6 + 6912x^7 + 39808x^8$. 23) $4x^6 + 13x^7 + 7x^8$.

24) $2122x^6 + 17593x^7 + 145861x^8$. 25) $63x^6 + 188x^7 + 313x^8$.

27) $28x^6 - 27x^7 + 90x^8$. 28) $313x^6 + 711x^7 + 1593x^8$.

29) $457x^6 + 347x^7 + 3345x^8$. 30) $x^6 + 2x^7 + x^8$.

34) Es sei 1) $1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 = (1-px)(1-qx)$ der Nenner der die Reihe $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ erzeugenden Funktion und daher nach Früherem $a_n = M p^n + N q^n$ und $a_{n+1} = M p^{n+1} + N q^{n+1}$. Hieraus folgt

$$a_n q - a_{n+1} = M(q-p)p^n,\quad a_n p - a_{n+1} = N(p-q)q^n \text{ und}$$

$$(a_n q - a_{n+1})(a_n p - a_{n+1}) = MN(p-q)^2 p^n q^n \text{ oder}$$

$$2)\ a_n^2 pq - (p+q) a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = MN(p-q)^2 p^n q^n.$$

Aber nach 1) ist $-(p+q) = \alpha_1$ und $pq = \alpha_2$, und die unbekannten Constanten M und N sind aus den Gleichungen $a_0 = M + N$, $a_1 = Mp + Nq$ zu berechnen. Diese Werthe in 2) substituirt erhält man

$$3)\ \alpha_2 a_n^2 + \alpha_1 a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = (\alpha_2 a_0^2 + \alpha_1 a_0 a_1 + a_1^2)\alpha_2^n,$$

aus welcher Gleichung a_{n+1} berechnet werden kann, wenn a_n gegeben ist, oder umgekehrt.

In 34) ist $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 1$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 5$, daher übergeht 3) in $a_3^2 - 10a_3 + 25 = 1$, woraus $a_3 = 5 \pm 1$ folgt, von welchen beiden Werthen jedoch nur 4 beizubehalten ist.

36) Die erzeugende Funktion für eine Reihe r^{ter} Ordnung $a_0 + a_1 x + \ldots$ ist $\dfrac{A_0 + A_1 x + \ldots + A_{r-1} x^{r-1}}{1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots \alpha_r x^r}$. Zur Bestimmung des Nenners hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_0 \alpha_r + a_1 \cdot \alpha_{r-1} + \ldots + a_r &= 0 \\ a_1 \alpha_r + a_2 \cdot \alpha_{r-1} + \ldots + a_{r+1} &= 0 \\ &\vdots \\ a_r \alpha_r + a_{r+1} \alpha_{r-1} + \ldots + a_{2r} &= 0 \end{aligned}$$

aus welchen $\alpha_r = \begin{vmatrix} -a_r & a_1 & \ldots a_{r-1} \\ -a_{r+1} & a_2 & \ldots a_r \\ \vdots & & \\ -a_{2r} & a_{r+1} & \ldots a_{2r-1} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots a_{r-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots a_r \\ \vdots & & \\ a_r & a_{r+1} & \ldots a_{2r} \end{vmatrix}$ folgt.

Die Constanten des Zählers findet man aus den Gleichungen 3) in (A).

$$37)\ S_{16} = \frac{5 + 3x + 35x^{16} + 33x^{17}}{1 + 2x + x^2}.$$

$$38)\ S_n = [3 - 3x + 2x^2 - (n^2 + 2n + 3)x^n + (2n^2 + 2n + 3)x^{n+1} - (n^2 + 2)x^{n+2}] : (1-x)^3.$$

40) Ist $S = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ die zu untersuchende Reihe, so bestimme man nach Lagrange die ersten zwei Glieder des Quotienten $\frac{1}{S}$, wodurch man $p + qx$ und einen Rest $x^2 R_1$ findet. Es sei ferner

$$\frac{S}{R_1} = p_1 + q_1 x + x^2 \frac{R_2}{R_1}$$

$$\frac{R_1}{R_2} = p_2 + q_2 x + x^2 \frac{R_3}{R_2} \text{ etc. und endlich } R_{r-2}$$

durch R_{r-1} theilbar, so dass $\dfrac{R_{r-2}}{R_{r-1}} = p_{r-1} + q_{r-1} x$; so ist die Reihe eine recurrirende der r^{ten} Ordnung.

Im vorliegenden Beispiele ist $\frac{1}{S} = 1 + 3x$. Die Reihe ist also eine recurrirende der 1^{ten} Ordnung und $S = \dfrac{1}{1+3x}$ ihre Summe. In der That ist die Reihe eine geometrische Progression.

41) $\frac{1}{S} = 1 - 4x + 9x^2 \frac{(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots)}{S} = 1 - 4x + 9x^2 \frac{R_1}{S}$

$\frac{S}{R_1} = 1 + 2x$; die Reihe ist also eine recurrirende von der zweiten Ordnung, und ihre Summe ist $\frac{1 + 2x}{(1 - x)^2}$.

46) Die Reihe lässt sich in eine recurrirende verwandeln, denn es ist $S_n = x + x^2 + \ldots + x^n - (x^2 + x^4 + \ldots x^{2n}) = x\frac{1 - x^n}{1 - x} - x^2 \frac{1 - x^{2n}}{1 - x^2}$, $S = \mathit{lim}\, S_n = \frac{x}{1 - x} - \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}$, (wobei $x^2 < 1$). Für $x = 1$ nimmt S_n die Form $\frac{0}{0} - \frac{0}{0}$ an, deren wahrer Werth $n - \frac{2n}{2} = 0$ ist. Also ist auch $\mathit{lim}\, S_n = S = 0$. Aus der Formel $S = \frac{x}{1 - x^2}$ folgt dagegen $S = \infty$ für $x = 1$. Man ersieht hieraus, dass die Summe der Reihe von $x = 0$ bis x nahezu $= 1$ im fortwährenden Wachsen begriffen ist, für $x = 1$ aber plötzlich von dem unendlich grossen Werth auf Null überspringt, und somit discontinuirlich wird.

49) Man setze den Ausdruck, dessen Unveränderlichkeit bewiesen werden soll, gleich P_n und berechne P_{n+1} etc.

50) und 51) Die beiden Sätze sind specielle Fälle eines allgemeineren, welchen wir unter der Voraussetzung, dass u_n von der Form $C_1 c_1^n + C_2 c_2^n + \ldots + C_r c_r^n$ sei, beweisen wollen. Unter dieser Voraussetzung ist nämlich

$$u_{n+h}\, u_{n+h'} = (C_1 c_1^{n+h} + \ldots + C_r c_r^{n+h})(C_1 c_1^{n+h'} + \ldots + C_r c_r^{n+h'})$$

$$= \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{q=1}^{q=r} C_p C_q \,.\, c_p^h c_q^{h'} \,.\, (c_p c_q)^n \text{ und ebenso}$$

$$u_{n+k}\, u_{n+k'} = \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{q=1}^{q=r} C_p C_q\, c_p^k c_q^{k'} (c_p c_q)^n \text{ und daher}$$

$$U_n = u_{n+h}\, u_{n+h'} - u_{n+k}\, u_{n+k'} = \sum_{p=1}^{p=r} \sum_{q=1}^{q=r} C_p C_q (c_p c_q)^n (c_p^h c_q^{h'} - c_p^k c_q^{k'})$$

Im rechten Theile dieser Gleichung werden, wenn man die Annahme $h + h' = k + k'$ macht, alle Glieder verschwinden, in welchen p und q gleiche Werthe besitzen, ausserdem kann man je zwei Glieder, welche einen gemeinschaftlichen Faktor enthalten, zusammenfassen, und man findet:

$U_n = B_{1,2} (c_1 c_2)^n + B_{1,3} (c_1 c_3)^n + \ldots + B_{r-1,r} (c_{r-1} c_r)^n$, wobei

$B_{p,q} = C_p C_q (c_p^h c_q^{h'} + c_q^h c_p^{h'} - c_p^k c_q^{k'} - c_q^k c_p^{k'})$ gesetzt wurde.

Wie man sieht, ist U_n das allgemeine Glied einer gleichfalls recurrenten Reihe von der Ordnung $\frac{r(r-1)}{2}$. — Jenachdem man nun entweder $h=0$, $h'=2$ und $k=k'=1$ oder $h=0$, $h'=3$ und $k=1$, $k'=2$ setzt, gelangt man zu 50) oder 51) zurück.

B) 57) Man verwandle den Ausdruck $1+(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe von der Form $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$, so erhält man mittelst des polynomischen Lehrsatzes für die m^{te} Potenz dieser Reihe eine Reihe von der Form $A_0^m+A_1^m x+A_2^m x^2+\ldots$. Es bezeichne A_n^{m+1} den Coefficienten des allgemeinen Gliedes in der Entwicklung von $(a_0+a_1x+\ldots)^{m+1}$, so lässt sich derselbe aus A_0^m, A_1^m, ... vermittelst der Gleichung

$$\left(\alpha+\frac{n\beta}{m+1}\right)A_n^{m+1}=\alpha a_0 A_n^m+(\alpha+\beta)a_1 A_{n-1}^m+\ldots+(\alpha+n\beta)a_n A_n^m\text{*)},$$

in welcher α und β beliebige Zahlen bedeuten, berechnen.

Setzt man $\alpha=-1$, $\beta=2$ und ferner — um auch A_{n+1}^{m+1} zu erhalten — $\alpha=0$, $\beta=2$ und $n+1$ satt n, und addirt die so entstehenden Gleichungen, so findet man:

$$-A_n^m=\frac{2n-m-1}{m+1}A_n^{m+1}+\frac{2n+2}{m+1}A_{n+1}^{m+1}\text{ und hieraus:}$$

$A_{n+1}^{m+1}=-\frac{m+1}{2(n+1)}A_n^m+\frac{m+1-2n}{2(n+1)}A_n^{m+1}$. Statt $m+1$ blos m und n statt $n+1$ setzend, und von den Werthen $A_0^m=2^m$, $A_0^{m-1}=2^{m-1}$ ausgehend, erhält man durch successive Berechnung: $A_1^m=m2^{m-2}$, $A_2^m=\frac{m}{2}(m-3)_1\, 2^{m-4}$, $A_3^m=\frac{m}{3}(m-4)_2\, 2^{m-6}$ und allgemein $A_n^m=\frac{m}{n}(m-n-1)_{n-1}\, 2^{m-2n}$. Die Entwicklung gilt für alle jene x, für welche die Summe der Reihe $a_1x+a_2x^2+\ldots$, selbst wenn man in derselben alle Glieder auf ihren Zahlwerth reducirt, kleiner ist als $[a_0]$.

---

*) Es ist bekanntlich

$$A_n^m=(m)_1 a_0^{m-1}\, {}^nC_p^1+(m)_2 a_0^{m-2}\, {}^nC_p^2+\ldots+(m)_n a_0^{m-n}\, {}^nC_p^n,$$

wenn ${}^rC_p^m$ die Summe aller Combinationen der m^{ten} Klasse zur Summe r aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen a_1, a_2, ... a_r bezeichnet, jede Combination als ein Produkt aufgefasst und mit der zugehörigen Permutationszahl multiplicirt. Aus dieser Gleichung leite man A_{n-1}^m, A_{n-2}^m ... A_1^m ab, multiplicire diese Gleichungen beziehungsweise mit αa_0, $(\alpha+\beta)a_1$ ... $(\alpha+(n-1)\beta)a_{n-1}$, füge die Gleichung $(\alpha+\beta n)A_0^m=a_0^m$ hinzu, und addire sämmtliche Gleichungen. Transformirt man sodann den rechten Theil unter Anwendung der aus der Combinationslehre her bekannten Formeln

$${}^rC_p^m={}^rC_p^{m-1}a_0+{}^{r-1}C_p^{m-1}.a_1+\ldots+a^r\text{ und}$$

$${}^rC_p^{m+1}=\frac{m+1}{r}\left[{}^{r-1}C_p^m a_1+{}^{r-2}C_p^m.2a_2+\ldots+ra_r\right],$$

so findet man die oben angegebene Gleichung.

60) Man transformire unter der Voraussetzung $x^2 < 1$ die Reihe zunächst in $(n)_1 P_1 + (n)_2 P_2 + (n)_3 P_3 + \ldots$, worin $P_r = x^r + x^{2r} + x^{3r} + \ldots$ ist, und ordne nun nach Potenzen von x. Ist m' ein Faktor von m und $f m' = m$, so wird der Ausdruck $(n)_{m'} P_{m'} = (n)_{m'}(x^{m'} + x^{2m'} + \ldots + x^{fm'} + \ldots)$ ein Glied mit x^m — nämlich $(n)_{m'} x^{fm'}$ — und nur dieses einzige liefern etc. Zu bemerken ist, dass dieses Bildungsgesetz nur für niedrigere Potenzen als die n^{te} gelten würde, wenn n eine positive und ganze Zahl wäre.

63) In der Gleichung $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots$ lasse man an die Stelle von z die Reihe $a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ treten, entwickle die einzelnen Potenzen derselben nach dem polynomischen Lehrsatze und ordne nach den Potenzen von x, wodurch man eine Reihe von der Form $1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$ erhält, in welcher 1) $A_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{{}^n C_p^k}{k!}$, wenn ${}^n C_p^k$ die Summe der Combinationen der k^{ten} Klasse zur Summe n aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $a_1, a_2, \ldots a_n$, jede Combination als ein Produkt aufgefasst und mit der zugehörigen Permutationszahl multiplicirt, bedeutet. Um aus der obigen für A_n gefundenen independenten Formel die recurrirende zu erhalten, wende man die der Combinationslehre entnommene Formel

$$
{}^n C_p^m = \frac{m}{n} \left[{}^{n-1} C_p^{m-1} . a_1 + {}^{n-2} C_p^{m-1} . 2a_2 + \ldots + \right.
$$

$$
\left. + {}^{m-1} C_{m-1}^p (n - m + 1) a_{n-m+1}\right]
$$

auf die einzelnen Glieder des obigen Summenausdrucks, das erste ausgenommen, an, füge den so entstehenden Gleichungen die folgende ${}^n C_p^1 = \frac{n a_n}{n}$ hinzu, und addire sämmtliche Gleichungen. Man wird hiedurch $\sum_{k=1}^{k=n} \frac{{}^n C_p^k}{k!} = a_1 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{{}^{n-1} C_p^k}{k!} + 2a_2 \sum_{k=1}^{n-2} \frac{{}^{n-2} C_p^k}{k!} + \ldots + n a_n$, d. h. 2) $A_n = \frac{a_1 A_{n-1} + 2a_2 A_{n-2} + \ldots + n a_n}{n}$, als gesuchte recurrirende Formel finden.

64) *a*) Da $-l(1-x) = l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$, so ist

$$
e^{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots} = e^{l\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,
$$

also $a_n = \frac{1}{n}$ und $A_n = 1$. Die Formel 1) der vorigen Aufgabe übergeht

hiemit in $A_n = 1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{{}^nC_p^k}{k!}$, wo die Combinationen aus den Elementen $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \frac{1}{n}$ zu bilden sind. Ist nun n eine Primzahl, so giebt es in der Summe $\sum_{k=1}^{n} \frac{{}^nC_p^k}{k!}$ nur die beiden Glieder $\frac{{}^nC_p^1}{1!} = \frac{1}{n}$ und $\frac{{}^nC_p^n}{n!} = \frac{1}{n!}$, in deren Nennern der Faktor n vorkommt. Bezeichnet s die Summe der übrigen Glieder, so ist also auch 3) $1 = \frac{1}{n} + \frac{1}{n!} + s$ oder 4) $(1 - s)(n - 1)!$ $= \frac{(n-1)! + 1}{n}$. Der linke Theil dieser Gleichung ist eine ganze Zahl, daher muss im rechten Theil $(n-1)! + 1$ durch n theilbar sein. Man hat diese Eigenschaft nur in Worten auszudrücken, um den Wilson'schen Satz zu erhalten. Die Formel 3) lässt eine bemerkenswerthe Umgestaltung zu. Man denke sich nämlich aus $\frac{{}^nC_p^k}{1.2.3\ldots k}$ diejenige Form herausgehoben, in welcher das erste Element $a_1 = 1$ a mal, das zweite Element $a_2 = \frac{1}{2}$ b mal, das dritte Element $a_3 = \frac{1}{3}$ c mal u. s. w. vorkommt, so dass also $1a + 2b + 3c + \ldots = n$ ist, so ist die zu dieser Combination gehörende Permutationszahl $\frac{1.2.3\ldots k}{1.2\ldots a.1.2\ldots b.1.2\ldots c\ldots}$ und

$$\frac{k!}{a!\,b!\,c!} \cdot \frac{\left(1\right)^a \left(\frac{1}{2}\right)^b \left(\frac{1}{3}\right)^c \ldots}{k!} = \frac{1}{a!\,b!\,c!\,2^b\,3^c\ldots}$$

ist der Werth der betrachteten Combinationsform. Hiemit aber übergeht die Formel 3) in $1 = \sum \frac{1}{2^b\,3^c\ a!\,b!\,c!}$ und liefert den von Jacobi aufgestellten Satz: die Summe aller Zahlen, welche man aus der Form $\frac{1}{2^b\,3^c\ldots a!\,b!\,c!\ldots}$ erhält, wenn man für a, b, c, ... solche positive ganze Zahlen (mit Einschluss der Nulle) setzt, dass $a + 2b + 3c + \ldots$ denselben Werth n behält, welches auch dieser Werth sei, ist der Einheit gleich.

C) 68 *d*) Aus: $l2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ durch Umformung der Reihe abzuleiten. Ist nämlich allgemein $S = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots$ eine convergente Reihe mit regelmässigem Zeichenwechsel, und man setzt:

$$\begin{array}{lll} u_1 - \quad u_2 = \Delta u_1, & u_2 - \quad u_3 = \Delta u_2, & u_3 - \quad u_4 = \Delta u_3 \ldots \\ \Delta u_1 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_1, & \Delta u_2 - \Delta u_3 = \Delta^2 u_2, & \Delta u_3 - \Delta u_4 = \Delta^2 u_3 \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \end{array}$$

so ist $2S = u_1 + (u_1 - u_2) - (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) \ldots =$

$$= u_1 + \Delta u_1 - \Delta u_2 + \Delta u_3 - \ldots$$

$$4S = 2u_1 + \Delta u_1 + (\Delta u_1 - \Delta u_2) - (\Delta u_2 - \Delta u_3) + \ldots =$$
$$= 2u_1 + \Delta u_1 + \Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_2 + \ldots$$
$$8S = 4u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + (\Delta^2 u_1 - \Delta^2 u_2) - \ldots =$$
$$= 4u_1 + 2\Delta u_1 + \Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 \ldots$$
$$16S = 8u_1 + 4\Delta u_1 + 2\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 + (\Delta^3 u_1 - \Delta^3 u_2) - \ldots =$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$= 8u_1 + 4\Delta u_1 + 2\Delta^2 u_1 + \Delta^3 u_1 + \Delta^4 u_1 - \ldots$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Bilden nun die Differenzen
$$\begin{array}{lll} \Delta u_1, & \Delta u_2, & \Delta u_3 \ldots \\ \Delta^2 u_1, & \Delta^2 u_2, & \Delta^2 u_3 \ldots \\ \Delta^3 u_1, & \Delta^3 u_2, & \Delta^3 u_3 \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$
fallende Reihen, so folgt aus den vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{1}{2} u_1 < S < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{2} \Delta u_1$$

$$\frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 < S < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{4} \Delta^2 u_1 \text{ u. s. w.}$$

und allgemein:

$$S > \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n u_1$$

$$S < \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n u_1 + \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^{n+1} u_1$$

also $S = \frac{1}{2} u_1 + \frac{1}{4} \Delta u_1 + \frac{1}{8} \Delta^2 u_1 + \frac{1}{16} \Delta^3 u_1 + \ldots +$

$$+ \frac{1}{2^{n+1}} \Delta^n u_1 + \frac{\varrho}{2^{n+1}} \Delta^{n+1} u$$

$$(0 < \varrho < 1).$$

(Diese Reihentransformation rührt von Euler her.)

70) *b) c) d)* Mittelst *a)* und der Gleichungen

$$1 = \sum_{n=2} \frac{1}{2^n} + \sum \frac{1}{3^n} + \sum \frac{1}{4^n} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2} = \sum_{n=1} \frac{1}{2^{2n}} + \sum \frac{1}{4^{2n}} + \sum \frac{1}{6^{2n}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{4} = \sum_{n=1} \frac{1}{3^{2n}} + \sum \frac{1}{5^{2n}} + \sum \frac{1}{7^{2n}} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x}\right)=\frac{1}{(x-1)\,x\,(x+1)}=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^7}+\ldots$$

abzuleiten.

e) f) g) h) i) In der Gleichung

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^6}+\ldots$$

setze man für x alle ganze positive Zahlen von der Form $4n+3$ und addire die so erhaltenen Gleichungen, so findet man die erste der Gleichungen *e*). Die Gleichung *g*) liefert in Verbindung mit

$$\frac{1}{2}=\sum_{n=1}\frac{1}{2^{2n}}+\sum\frac{1}{4^{2n}}+\ldots$$

die erste der Gleichungen *h*), welche man mit der ersten der Gleichungen *c*) zu verbinden hat, um die zweite der Gleichungen *e*) und die erste der Gleichungen *i*) zu erhalten.

72) *a*) $-x+l\left[(1+x)\sqrt{1+x^2}\right]=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-2\frac{x^4}{4}\right)+$

$$+\left(\frac{x^7}{7}+\frac{x^9}{9}-2\frac{x^8}{8}\right)+\left(\frac{x^{11}}{11}+\frac{x^{13}}{13}-2\frac{x^{12}}{12}\right)+\ldots$$

b) $x-l\frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}=\left(2\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)+\left(2\frac{x^6}{6}-\frac{x^7}{7}-\frac{x^9}{9}\right)+$

$$+\left(2\frac{x^{10}}{10}-\frac{x^{11}}{11}-\frac{x^{13}}{13}\right)$$

73) *a*) $l\left(\frac{1+x}{1-x+x^2}\right)=2l(1+x)-l(1-x^3)=$ etc.

74) $l(1+x)=l\left(\frac{1}{1-x}\right)-l\left(\frac{1}{1-x^2}\right)=$ etc.

75) Soll die Potenzreihe $a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ identisch sein mit einer Reihe von der Form $b_1\left(\frac{x}{1+x}\right)+b_2\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+b_3\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots$, so muss zwischen den Coefficienten dieser Reihen die Beziehung bestehen: $b_n=(n-1)_0a_1+(n-1)_1a_2+(n-1)_2a_3+\ldots(n-1)_{n-1}a_n$, welche man leicht findet, wenn man die zweite Reihe durch Entwicklung der einzelnen Glieder auf die Form der ersten Reihe bringt. Nun ist $\frac{1}{1+x}l\left(\frac{1}{1-x}\right)$ einerseits $=x-\left(1-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\ldots$ und anderseits auch $=\frac{1}{1+x}\left[l\left(1-\frac{x}{1+x}\right)-l\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)\right]=$

$$=\frac{1}{1+x}\left[\frac{2-1}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)+\frac{2^2-1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\frac{2^3-1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots\right]$$

Multiplicirt man beide Reihen mit x, so erhält man

$$x^2 - \left(1 - \frac{1}{2}\right) x^3 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) x^4 - \ldots =$$

$$= \frac{2-1}{1}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{2^2-1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \frac{2^3-1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^4 + \ldots$$

demnach ist $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = -\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ etc., und

$$b_{n+1} = \frac{2^n - 1}{n} = (n)_1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)(n)_2 + \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)(n)_3 - \ldots$$

76) Es sei $S = a_0 x + a_1 x^3 + a_2 x^5 + a_3 x^7 + \ldots$

Man multiplicire beiderseits mit x, setze sodann $x = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ und entwickle die Glieder des rechten Theiles, so erhält man die von Euler gegebene Gleichung $\frac{Sy}{\sqrt{1+y^2}} = b_1 y^2 + b_2 y^4 + b^3 y^6 + \ldots$, in welcher $b_{n+1} = a_n - (n)_1 a_{n-1} + (n)_2 a_{n-2} - (n)_3 a_{n-3} + \ldots \pm a_0 =$ dem Anfangsgliede $\Delta^n a_0$ der n^{ten} Differenzenreihe aus den positiven Grössen $a_0, a_1, a_2, a_3 \ldots$

Wäre $S = a_0 x - a_1 x^3 + a_2 x^5 - \ldots$, so würde man $x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ setzen und fände $\frac{S}{\sqrt{1-y^2}} = a_0 y - \Delta a_0 y^3 + \Delta^2 a_0 y^5 - \ldots$

77) $$l(1 - 2x\cos\alpha + x^2)^{\frac{1}{2}} = -x\cos\alpha - \frac{x^2}{2}\cos 2\alpha -$$
$$- \frac{x^3}{3}\cos 3\alpha - \frac{x^4}{4}\cos 4\alpha - \ldots$$

78) $$y_1 + y_2 = -l(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$$
$$y_2 - y_1 = -\frac{1}{2}l(1 - 2x\cos 2\alpha + x^2) =$$
$$= x\cos 2\alpha + \frac{x^2}{2}\cos 4\alpha + \frac{x^3}{3}\cos 6\alpha + \ldots$$

Aus diesen beiden Gleichungen findet man jene Reihen, welche beziehungsweise die Summen y_1 und y_2 besitzen.

79) Man verwandle die Ausdrücke $l(1-x)$, $l(1-x^2)$, $l(1-x^3)$ etc. in Reihen und addire diese, so findet man

$$l(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots = -\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \ldots\right),$$

worin $P_n = x^n + x^{2n} + x^{3n} + \ldots$

Ordnet man nun die Reihe $-\left(P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{3}P_3 + \ldots\right)$ nach den steigenden Potenzen von x und sucht den Coefficienten von x^n, so bemerkt

man leicht, dass nur jene P, deren Stellenzeiger Theiler von n sind, je ein Glied mit x^n — und zwar nur ein einziges — liefern können.

81) In No. 63 wurde die Aufgabe gelöst, den Ausdruck $e^{a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots}$ in die Potenzreihe $1 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots$ zu verwandeln. Aus der Gleichung $e^{a_1 x + a_2 x^2 + \cdots} = 1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ folgt nun: $l(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots) = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$ und die in No. 63) zur Berechnung von A_n aufgestellte recurrirende Formel liefert auch sofort die zwischen den Coefficienten $a_1, a_2, \ldots a_n$ stattfindende

$$a_n = \frac{n A_n - a_1 A_{n-1} - 2a_2 A_{n-2} \ldots - (n-1) a_{n-1} A_1}{n},$$

mittelst welcher man, von $a_1 = A_1$ ausgehend,

$$a_2 = A_2 - \frac{A_1^2}{2}, \quad a_3 = A_3 - \frac{1}{2} \cdot 2A_1 A_2 + \frac{1}{3} A_1^3,$$

$$a_4 = A_4 - \frac{1}{2}(2A_1 A_3 + A_2^2) + \frac{1}{3} \cdot 3A_1^2 A_2 - \frac{1}{4} A_1^4 \text{ und allgemein}$$

$$a_n = {}^n C_p^1 - \frac{1}{3} {}^n C_p^2 + \frac{1}{3} {}^n C_p^3 - \ldots + (-1)^{r-1} \cdot \frac{1}{r} {}^n C_p^r$$

findet, wenn man unter ${}^n C_p^k$ die Summe der aus den unbeschränkt wiederholbaren Elementen $A_1, A_2 \ldots A_n$ gebildeten Combinationen der k^{ten} Klasse zur Summe n, jede Combination als ein Produkt aufgefasst und mit der dazu gehörigen Permutationszahl multiplicirt, begreift.

(Eine bemerkenswerthe Beziehung ergiebt sich, wenn man die für a_n aufgestellte Gleichung auf $l\left(1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots\right) = l\, e^x = x$ anwendet.)

D) 95) *a)* und *b)* Man entwickle die Ausdrücke $\frac{1 - x \cos\varphi}{1 - 2x \cos\varphi + x^2}$ und $\frac{x \sin\varphi}{1 - 2x \cos\varphi + x^2}$ in Potenzenreihen, setze $x = (1 - a)\cos\varphi$, subtrahire von den ersten so entstehenden Gleichungen die Einheit, dividire beide durch $1 - a$ und drücke schliesslich links $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch $\operatorname{tang}\varphi$ aus.

c) Man benütze die Formel $\frac{1}{2^n} \cot\frac{\varphi}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}} \cot\frac{\varphi}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n} \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2^n}$

98) $\frac{1}{2}\cos^2 x + \frac{1}{4}\cos^4 x + \frac{1}{6}\cos^6 x + \ldots$ 99) Siehe 75).

100) *a)* $\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{11}}{11} \ldots$ *b)* $x + \frac{x^7}{7} + \frac{x^{13}}{13} + \ldots$ *c)* $\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^8}{8} - \ldots$

102) $x \sin\alpha + \frac{1}{2} x^2 \sin 2\alpha + \frac{1}{3} x^3 \sin 3\alpha + \ldots$

103) *a)* $$\left(\frac{x}{1.1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{2.3}\right) - \left(\frac{x^5}{2^2.5} + \frac{x^6}{2^2.6} + \frac{x^7}{2^3.7}\right) + \\ + \left(\frac{x^9}{2^4.9} + \frac{x^{10}}{2^4.10} + \frac{x^{11}}{2^5.11}\right) - \ldots$$

104) Man drücke $2 \operatorname{arctang}(x-1)$ durch $2 \operatorname{arctang} \frac{x}{2-x}$ aus.

105) Wendet man auf $\operatorname{arctang} y = y - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \ldots$ die in No. 76) angegebene Transformation an, so findet man

$$\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2.4}{3.5} x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7} x^7 + \ldots (x^2 < 1)$$

106) In $\operatorname{arctang} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ setze man $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ und ziehe die Glieder paarweise zusammen.

Mittelst dieser Reihe berechneten die genannten Mathematiker die Ludolph'sche Zahl π im 17. Jahrhunderte auf 72, beziehungsweise auf 127 Dezimalstellen.

107) *a*) Diese Reihe erhält man aus der Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{3} + \operatorname{arctang} \frac{1}{7},$$

durch Entwicklung der Glieder des rechten Theiles und nachherige Reduction.

b) Mit Hilfe dieser Reihe berechnete Vega die Zahl π bis auf 140 Dezimalen und prüfte die Richtigkeit des Resultates bis auf 126 Dezimalen mittelst der Gleichung *a*).

c) Man erhält die vorliegende Reihe aus der von dem englischen Mathematiker Machin aufgestellten Gleichung:

$$\frac{\pi}{4} = 4\left(\frac{1}{1.5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \ldots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3.239^3} + \frac{1}{5.239^5} - \ldots\right),$$

mittelst welcher derselbe die Zahl π bis auf 100 Dezimalen und neuerdings Shanks bis auf 530 Dezimalen berechnete. *)

f) und *g*) Aus der Formel

$$\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{3} + \operatorname{arctang} \frac{1}{7} =$$

$$= 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{4} + \operatorname{arctang} \frac{1}{7} + \operatorname{arctang} \frac{1}{13}$$

abzuleiten.

h) $\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctang} \frac{1}{6} + 4 \operatorname{arctang} \frac{1}{31} - \operatorname{arctang} \frac{1}{239} =$ etc.

*) Ausser den bereits Genannten haben noch Andere sich mit der Berechnung der Ludolph'schen Zahl beschäftigt. So u. A. Dahse (200 Stellen), Clausen (256 Stellen), Rutherford (440 Stellen) und Richter (500 Stellen). Die ersten 35 Dezimalstellen von π sind:

3·14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288,

und bis dahin wurde die Rechnung zuerst von Ludolph von Köln durchgeführt, weswegen diese Zahl die Ludolph'sche genannt wird.

108) *c*) Es ist $\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$, daher $\frac{1}{2^2-1}$ = etc.

d) Aus *c*) und $\frac{1}{2} = \frac{1}{2^2-1} + \frac{1}{4^2-1} + \frac{1}{6^2-1} + \ldots$ abzuleiten.

f) Man verbinde *e*) mit $\frac{1}{4} = \sum_{n=1} \frac{1}{3^{2n}} + \sum \frac{1}{5^{2n}} + \ldots$ durch Addition.

g) Aus *f*) und 70) *d*) abzuleiten unter Benützung der Eigenschaft, dass jede ungerade Potenz von $4n+3$ wieder in der Form $4n+3$ enthalten ist. Die Gleichung *g*) lässt sich auch schreiben:

$$\frac{\pi}{4} - l\,2 = \sum \frac{1}{x^{2n+1}-1} + \sum \frac{1}{x^{2n+1}+1} = \sum \frac{2 \,.\, x^{2n+1}}{x^{4n+2}-1},$$

(wo man für x alle in der Form $4n+3$ enthaltene Zahlen zu setzen hat, welche keine höhere Potenz sind) und wurde in dieser Form von Euler aufgestellt.

h) Ebenfalls aus *f*) und 70) *d*) abzuleiten. Hiebei sei bemerkt, dass jede Potenz einer Zahl von der Form $4n+1$ wieder in derselben Form enthalten ist.

i) Man verbinde die letzte der Gleichungen *g*) mit der letzten der Gleichungen *h*).

k) und *l*) In 103) setze man $x = \sqrt{2}$ und verbinde die so entstehende Gleichung mit $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$

m) Aus der Formel $\frac{\pi}{4} = 2 \operatorname{arctang} \frac{1}{3} + \operatorname{arctang} \frac{1}{7}$ mittelst 103) abzuleiten.

n) Diese Gleichung ist in der allgemeineren

$$\frac{1}{s} = \cot s + \frac{1}{3} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{s}{3}\right) + \frac{1}{9} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{s}{9}\right) + \ldots$$
$$- \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{s}{3}\right) - \frac{1}{9} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{s}{9}\right) - \ldots,$$

welche von Euler mittelst der leicht nachweisbaren Formel

$$\cot s = \frac{1}{3} \cot \frac{s}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{s}{3}\right) + \frac{1}{3} \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{s}{3}\right)$$

entwickelt wurde, als besonderer Fall enthalten.

Zu VIII.

Bezeichnet u_n eine gegebene Funktion des Stellenzeigers n, so ist das Produkt der n Faktoren $u_1\, u_2 \ldots . u_n$ selbst eine gewisse Funktion von n, welche P_n heissen möge, so dass $P_n = u_1\, u_2\, u_3 \ldots . u_n$. Lässt man nun die Gliederzahl n ins Unendliche wachsen, so übergeht das endliche Pro-

dukt in ein unendliches, und hiebei wird P_n offenbar sich entweder einem einzigen bestimmten endlichen Werthe P oder — je nach Beschaffenheit der Zahl n — mehreren solchen Werthen unbegrenzt nähern, oder endlich mit unendlich wachsendem n selbst unendlich gross werden. Im ersten Falle heisst das unendliche Produkt convergent, in den beiden letzten Fällen divergent. *) Die Entscheidung hierüber ist leicht, wenn man

1) $u_1 u_2 u_3 \ldots . u_n = e^{lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots + lu_n}$ **)

2) $lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots . lu_n = s_n$ setzt; denn aus dieser Gleichung folgt unmittelbar:

a) Das unendliche Produkt convergirt oder oscillirt gleichzeitig mit der Reihe $lu_1 + lu_2 + lu_3 + \ldots .$.

b) Dasselbe divergirt, wenn die Reihe divergirt und $lim\, s_n = + \infty$ ist.

c) Das unendliche Produkt convergirt gegen Null, wenn die Reihe divergirt und $lim\, s_n = - \infty$ ist.

Die Reihe 2), deren Glieder durchgehends positiv oder negativ sind, jenachdem u_n für jedes n grösser oder kleiner als 1 ist, divergirt jedenfalls, wenn $lim\, lu_n$ nicht Null, also $lim\, u_n$ nicht 1 ist „Ein unendliches Produkt also, in welchem sämmtliche Faktoren um ein Angebbares grösser sind als die Einheit divergirt; es convergirt dagegen gegen Null, wenn sämmtliche Faktoren um ein Angebbares kleiner sind als 1.“

Nehmen wir nun an, es sei $lim\, lu_n = 0$, also $lim\, u_n = 1$. Die Reihe 2) kann dann ebenso gut convergent als divergent sein; doch lässt sich in dem Falle, als sämmtliche Faktoren des Produktes den Grenzwerth 1 durch Zunahme erreichen (also durchgehends kleiner sind als die Einheit), die Convergenz des unendlichen Produktes behaupten. Denn nach der gemachten Voraussetzung sind sämmtliche Glieder der Reihe 2) negativ, daher ist auch s_n negativ und $lim\, P = e^{lim\, s_n}$ entweder einer positiven endlichen Grösse oder der Nulle gleich, jenachdem die Reihe 2) convergirt oder divergirt.

Einer besonderen Untersuchung bedürfen nach dem Vorhergehenden also nur mehr jene Produkte, bei welchen — wieder unter der Voraussetzung $lim\, u_n = 1$ — sämmtliche Faktoren grösser als die Einheit, oder theils grösser, theils kleiner als dieselbe sind, und die Faktoren einer jeden Gattung in unbegrenzter Anzahl vorkommen. Hiebei wird es in den meisten Fällen möglich sein, die Reihe 2), auf deren Convergenz oder Divergenz es ankömmt, durch einfachere Reihen zu ersetzen.

---

*) Divergente Produkte, welche sich verschiedenen Grenzen nähern, nennt man auch oscillirende.

**) Diese Gleichung setzt sämmtliche Faktoren des Produktes als positiv voraus; doch ist dies keine Beeinträchtigung der Allgemeinheit, da es für den Zahlenweth des Produktes gleichgiltig ist, ob die einzelnen Faktoren positiv oder negativ sind.

Stellt man nämlich das zu prüfende unendliche Produkt in der Form $(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots$ dar, so ist

$$s_n = l(1+v_1) + l(1+v_2) \ldots + l(1+v_n).$$

Wendet man auf die einzelnen Glieder des rechten Theiles dieser Gleichung die Formel an $l(1+x) = x - \frac{\varrho}{2} x^2$ *), in welcher ϱ eine positive Zahl und x einen beliebigen positiven oder negativen echten Bruch bezeichnet, indem man an die Stelle von x die Grössen $v_1, v_2, \ldots v_n$ **) treten lässt, wodurch ϱ in $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_n$ übergehen möge, so erhält man:

$$s_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - (\varrho_1 v_1^2 + \varrho_2 v_2^2 + \ldots + \varrho_n v_n^2).$$

Es sei ϱ_g die grösste und ϱ_k die kleinste der Grössen $\varrho_1\, \varrho_2 \ldots \varrho_n$, so liegt der Ausdruck $\varrho_1 v_1^2 + \varrho_2 v^2 + \ldots \varrho_n v_n^2$ zwischen $\varrho_k(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)$ und $\varrho_g(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)$ und kann dann gleich $\delta(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)$ gesetzt werden, wenn δ eine zwischen ϱ_k und ϱ_g liegende nicht näher bestimmbare positive Zahl bezeichnet. Hiedurch wird

$$s_n = (v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - \delta(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2) \text{ und}$$

$$P = e^{lim(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - \delta\, lim(v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2)} = e^{lim\, p_n - \delta\, lim\, q_n},$$

wenn man zur Abkürzung 3) $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n = p_n$ und
4) $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + \ldots + v_n^2 = q_n$ setzt.

Aus dieser Gleichung folgert man aber:

I) Das unendliche Produkt $(1+v_1)(1+v_2)(1+v_3)\ldots$ ist mit der Reihe 3) gleichzeitig convergent und hat insbesondere den Werth Null, wenn die Reihe 4) divergirt.

II) Das unendliche Produkt hat den Werth Null, wenn $lim\, p_n = -\infty$ ist, oder wenn 3) oscillirt, während 4) divergirt, und es ist divergent, wenn $lim\, p_n = +\infty$, die Reihe 4) dagegen convergirt.

III) Wenn die Reihe 3) oscillirt, die Reihe 4) dagegen convergirt, so oscillirt auch das unendliche Produkt.

IV) Wenn beide Reihen divergiren und $lim\, p_n = +\infty$ ist, so erscheint $lim\, s_n$ unter der unbestimmten Form $\infty - \infty$ und die Convergenz und Divergenz des Produktts bleibt unentschieden. In diesem Falle wird man zur allgemeinen Reihe 2) zurückzugreifen haben. So z. B. würde bei dem unendlichen Produkte

$$\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\sqrt{\frac{1}{4}}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots$$

$lim\, p_n - lim\, q_n = \infty - \infty$ sein. Da aber die Reihe

*) Siehe Schlömilch's Handb. pag. 176.

**) Da $lim\, v_n = 0$ ist, so muss v von einem bestimmten Werthe des n anfangen, jedenfalls numerisch $<$ als 1 sein; man kann jedoch ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit annehmen, dass diese Eigenschaft schon bei v_1 beginne, indem man die Anfangsglieder des Produktes, welche dieser Voraussetzung etwa nicht genügen, als für die Untersuchung unwesentlich, weglässt.

$$\left[l\left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)+l\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]+\left[l\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+l\left(1-\frac{1}{3}\right)\right]\ldots.$$

divergirt, und deren Glieder mit Ausnahme der zwei ersten durchgehends positiv sind, so divergirt auch das unendliche Produkt. *)

1) 2) 3) $P = 0$. 4) conv. 5) div. 6) 7) 8) 9) conv. 10) $P = 0$, wenn $a > 1$. Für $a < 1$ oscill. zwischen $+\infty$ und $-\infty$. 11) $P = 0$. 12) conv. 13) $P = 0$. 14) conv. 15) conv. 16) 17) div. 18) conv. $P = 1$. 19) $P = 0$. 20) 21) 22) conv. 23) $P = 0$. 24) conv. 25) 26) $P = 0$. 27) conv. 28) $P = 0$. 29) conv. 30) 31) $P = 0$. 32) div. 33) $P = 0$. 34) div.; denn da $\frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{2}{n}$, von $n = 5$ anfangend, so ist

$$P_{2n} > \left(1+\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{1}{3}}\right)\frac{2}{3}\left(1+\frac{2}{4}\right)\frac{3}{4}\left(1+\frac{2}{5}\right)\frac{4}{5}\cdots\cdots$$

$$\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\frac{n}{n+1} \text{ etc.}$$

35) div. 36) oscill. zwischen 0 und 1. 37) bis 40) oscill. 41) $P = 0$. 42) bis 47) conv. für $[q] < 1$. 48) bis 51) $P = 0$. 52) div. 54) Nach No. 83) III ist

$$l\,a = lim\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots.+\frac{1}{ma-1}\right) \text{**) für } m=\infty$$

und daher $l\sqrt[r]{a} = lim\left(\frac{1}{mr}+\frac{1}{(m+1)r}+\frac{1}{(m+2)r}+\ldots+\frac{1}{(ma-1)r}\right)$.

Da aber $\frac{1}{(m+n)r} = l\left(1+\frac{1}{(m+n)r}\right)+\frac{\mu_n}{(m+n)^2r^2}$ (wo μ_n einen echten Bruch bezeichnet) und $lim\left[\frac{\mu_0}{m^2r^2}+\frac{\mu_1}{(m+1)^2r^2}+\ldots\right] = 0$, so folgt aus der obigen Gleichung:

$$l\sqrt[r]{a} = lim\left[l\left(1+\frac{1}{mr}\right)+l\left(1+\frac{1}{(m+1)r}\right)+\ldots+l\left(1+\frac{1}{(ma-1)r}\right)\right],$$

---

*) Siehe auch: Stern: „Lehrbuch der algebraischen Analysis." Arndt: „Ueber die Convergenz der unendlichen Produkte etc." in Grunert's „Archiv für Mathem. und Physik", 21. Band, 1. Heft, und den schon früher citirten Aufsatz von Weierstrass „Ueber die Theorie der analytischen Facultäten."

**) Dieser Grenzwerth lässt sich auch mittelst der Ungleichheit

$$l\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right) > \frac{1}{p} > l\left(1+\frac{1}{p}\right),$$

in welcher p eine positive Zahl > als 1 bedeutet, leicht finden.

und daher $\sqrt[r]{a} = lim \frac{(mr+1)}{mr} \cdot \frac{(m+1)r+1}{(m+1)r} \cdots \left(\frac{(ma-1)r+1}{(ma-1)r}\right)$

$$= lim \frac{(m+1)r+1}{(m+1)r} \cdot \frac{(m+2)r+1}{(m+2)r} \cdots \frac{mar+1}{mar}$$

Der rechte Theil dieser Gleichung bleibt ungeändert, wenn man ihn mit

$$\frac{r+1}{r} \cdot \frac{2r+1}{2r} \cdots \frac{mr+1}{mr} \cdot \frac{ar}{ra+a} \cdot \frac{2ar}{2ra+a} \cdots \frac{mar}{mar+a} = 1$$

multiplicirt. Man findet hierdurch:

$$\sqrt[r]{a} = lim \frac{r+1}{r} \cdot \frac{2r+1}{2r} \cdots \frac{ar+1}{ar+a} \cdot \frac{(a+1)r+1}{(a+1)r} \cdots \frac{2ar+1}{2ar+a} \cdots \frac{mar+1}{mar+a}$$

und hieraus $\sqrt[r]{a} = P_0 \, P_1 \, P_2 \ldots . P_n \ldots .$, wenn man nämlich

$$P_n = \frac{(na+1)r+1}{(na+1)r} \cdot \frac{(na+2)r+1}{(na+2)r} \cdots \frac{((n+1)a-1)r+1}{((n+1)a-r)r} \cdot \frac{(n+1)ar+1}{(n+1)ar+a}$$

macht. Setzt man ferner

$$Q_n = \frac{nar+1}{nar+a} \cdot \frac{(na+1)r+1}{(na+1)r} \cdots \frac{((n+1)a-1)r+1}{((n+1)a-1)r},$$

so ist auch $\sqrt[r]{a} = a Q_0 \, Q_1 \, Q_2 \ldots . Q_n \ldots .$ und (wegen $P_n > 1$ und $Q_n < 1$)

$a Q_0 \, Q_1 \ldots . Q_n > \sqrt[r]{a} > P_0 \, P_1 \ldots . P_n$; der Fehler, welchen man begeht, wenn man $\sqrt[r]{a} = P_0 \ldots . P_n$ setzt, ist daher geringer als die Differenz $a Q_0 \ldots Q_n - P_0 \ldots P_n$

$$= P_0 \, P_1 \ldots P_n \left(a \frac{Q_0}{P_0} \frac{Q_1}{P_1} \cdots \frac{Q_n}{P_n} - 1\right) = P_0 \, P_1 \ldots P_n \frac{a-1}{(n+1)ar+1} \; *)$$

55) *a*) und *d*) $P_n = \dfrac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}$

e) Man benütze die Formel $\sin x = 3 \sin \frac{x}{3} \left(1 - \frac{4}{3} \sin^2 \frac{x}{3}\right)$ etc.

$P_n = \dfrac{\sin x}{3^n \sin \frac{x}{3^n}}$ *f*) Lässt sich bis auf einen constanten Faktor in *e*) verwandeln.

56) Jedes Produkt lässt sich in eine gleichgeltende Reihe verwandeln, und umgekehrt. Es besteht nämlich für beliebige grosse n die Identität:

$$1) \; \frac{v_1}{1} \cdot \frac{v_1+v_2}{v_2} \cdot \frac{v_1+v_2+v_3}{v_1+v_2} \cdots \frac{v_1+v_2+\ldots+v_n}{v_1+v_2+\ldots+v_{n-1}} = v_1+v_2+v_3 \ldots + v_n$$

welche übergeht in

$$2) \; u_1 u_2 u_3 \ldots u_n = u_1 + u_1(u_2-1) + u_1 u_2 (u_3-1) + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n-1),$$

---

*) *Bulletins de l'Académie de Bruxelles* 1849.

wenn man $\frac{v_1}{1} = u_1$, $\frac{v_1 + v_2}{v_2} = u_2$, $\frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2} = u_3 \ldots$ setzt. Setzt man in 1): $v_1 = 1$, $v_2 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1}$, $v_3 = \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)}$ etc., so findet man

$$3)\ \frac{1}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \ldots (1 - \alpha_n)} = 1 + \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{(1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)} + \ldots + \\ + \frac{\alpha_n}{(1 - \alpha_1) \ldots (1 - \alpha_n)}$$

und wenn man in dieser Formel an die Stelle von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ die Quotienten $\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3} \ldots$ treten lässt, endlich

$$4)\ \frac{\beta_1}{\beta_1 - \alpha_1} \cdot \frac{\beta_2}{\beta_2 - \alpha_2} \ldots \frac{\beta_n}{\beta_n - \alpha_n} = 1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 \beta_1}{(\beta_1 - \alpha_1)(\beta_2 - \alpha_2)} + \ldots + \\ + \frac{\alpha_n \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}}{(\beta_1 - \alpha_1) \ldots (\beta_n - \alpha_n)}$$

Von den vorgelegten Produkten mögen folgende zwei besonders hervorgehoben werden:

g) Dieses Produkt lässt sich in die geometrische Progression

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.$$

verwandeln. Da in der Reihe, in welcher alle Potenzen von x vorkommen, jede Potenz den Coefficienten 1 besitzt, deren Exponent aber durch Addition gewisser in der geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16, ... enthaltenen Zahlen entsteht; so folgt hieraus, dass sich jede Zahl durch Addition aus den Gliedern der eben genannten Progression und zwar nur auf eine einzige Art bilden lasse.

h) Die gleichgeltende Reihe ist

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \ldots..$$

Die Exponenten der Glieder von gerader Ordnung sind in der Form $\frac{3m^2 + m}{2}$, jene der Glieder ungerader Ordnung in der Form $\frac{3m^2 - m}{2}$ enthalten; diese Exponenten bilden daher arithmetische Reihen 2^ter^ Ordnung und die obige Reihe lässt sich kurz schreiben $\sum\limits_0^\infty (-1)^m x^{\frac{3m^2 \mp m}{2}}$, wenn man bei jeder Substitution für m zuerst das obere und dann das untere Zeichen nimmt. Jacobi hat (im XXI. Band von Crelle's Journal) gezeigt, dass die dritte Potenz dieser Reihe $= \sum\limits_0^\infty (-1)^n (2n + 1) x^{\frac{n^2 + n}{2}}$ ist.

57) Bezeichnet f(r, z) das unendliche Produkt und bringt man dasselbe unter die Form $\frac{1}{(1 - z)(1 - rz)(1 - r^2 z) \ldots}$, so sieht man, dass

es sich in die Reihe $1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots$ verwandeln lasse, und die Eigenschaft $f(r, rz) = (1-z) f(r, z)$ liefert die zur Bestimmung der Coefficienten nöthigen Gleichungen. Um das Theorem *a)* zu beweisen, beachte man, dass $f(q^2, x^2) = f(q, x) f(q, -x)$; ersetze jede dieser Funktionen durch die entsprechenden Reihen, verrichte das Angezeigte, und bestimme beiderseits den Coefficienten von x^n etc.

b) Man setze $r = q^{\frac{1}{2}}$.

58) *a)* und *b)* Die entsprechenden Reihen sind:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + \ldots \text{ und}$$

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + \ldots$$

Jeder Coefficient zeigt an, auf wievielerlei Arten der Exponent des zugehörigen x sich durch Addition aus der Zahlenreihe 1, 2, 3, ... bilden lasse, und zwar in *a)* wenn keine Wiederholungen und in *b)* wenn solche gestattet sind.

$$c) = \sum_0^\infty C_n z^n \text{, worin } C_n = C_{n-1} \frac{x^n}{1-x^n} = \frac{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)} =$$

der Summe der als Produkte aufgefassten Combinationen ohne Wiederholungen aus den Grössen $x, x^2, x^3, \ldots$ in der n^{ten} Klasse. Hieraus folgt, dass in C_n der Coefficient von x^p gleich ist der Anzahl der verschiedenen Arten, die Zahl p aus n verschiedenen Gliedern der natürlichen Zahlenreihe zu bilden. (*A*).

Verwandelt man ferner den Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^n)}$ in eine Potenzenreihe, so zeigt der Coefficient von x^m an, auf wieviele Arten die Zahl m aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n — bei erlaubter Wiederholung — durch Addition hervorgebracht werden kann. (*B*). Multiplicirt man nun diese Reihe mit $x^{\frac{n(n+1)}{2}}$, so erhält man die Entwicklung von C_n und der Coefficient von $x^{m + \frac{n(n+1)}{2}}$ ist offenbar identisch mit jenem von x^m der vorigen Reihe, daher folgt aus (*A*) und (*B*) der Satz:

„Auf eben so viele Arten, als man eine Zahl m durch Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, ... n hervorbringen kann, auf eben soviel Arten lässt sich auch die Zahl $m + \frac{n(n+1)}{2}$ in n ungleiche Theile theilen."

$$d) = \sum_{n=0}^\infty P_n z^n .. \quad e) \sum_{m=0}^\infty \frac{x^m z^m}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)}$$

P_n ist die Summe aller Combinationen der n^{ten} Klasse ohne Wiederholungen aus den Elementen $x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, \ldots$, jede Combination als ein Produkt aufgefasst. Daher kann man aus dem Coefficienten von x^m in P_n

ersehen, auf wie viele verschiedene Arten die Zahl m aus n verschiedenen Gliedern der Reihe $a_1, a_2, a_3, \ldots$ durch Addition gebildet werden kann.*)

59) $P_1 = 1 + \sum \pm \frac{1}{p^n}$, wo man für p alle Zahlen, welche nicht Potenzen kleinerer Zahlen oder durch solche theilbar sind, zu setzen hat. Von den beiden Zeichen hat man das obere oder untere beizubehalten, jenachdem sich p als Produkt einer geraden oder ungeraden Anzahl von Primfaktoren darstellen lässt.

Ferner ist $\frac{1}{P_1} = \sum \frac{1}{p^n}$, wo man für p alle natürlichen Zahlen zu setzen hat.

a) b) c) d) e) Setzt man $S_m = \frac{1}{1^m} + \frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots$, so ist bekanntlich $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$, $S_4 = \frac{\pi^4}{90}$, $S_6 = \frac{\pi^6}{945}$, $S_8 = \frac{\pi^8}{9450}$ etc. **) und diese Gleichungen liefern in Verbindung mit den Produkten P_1, P_2 die gesuchten Relationen.

60) Man betrachte

$$\begin{aligned}
u_n &= \left(\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\right)\cdots\left(\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+3}\right)\\
v_n &= \frac{2}{1}\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdots\left(\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\right)\\
t_n &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{6}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}\right)\\
z_n &= \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\cdots\left(\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+3}{2n+2}\right)
\end{aligned}$$

als allgemeine Glieder von Reihen und wende auf sie die aus der Theorie der Differenzenreihen bekannte Formel $y_n = y_0 + \Delta y_0 + \Delta y_1 + \ldots \Delta y_{n-1}$ an; so erhält man Reihen, deren Summen beziehungsweise u_n, v_n, t_n und z_n sind. — Indem man diese Reihen mit schicklich gewählten Constanten multiplicirt und dann durch Addition mit einander verbindet, findet man nach vorhergehendem Grenzübergange die zu beweisenden Gleichungen.

61) *a)* Es sei $S = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots$, $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) S = S_1$, $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) S_1 = S_2$, $\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) S_2 = S_3$, $\left(1 - \frac{1}{7^n}\right) S_3 = S_4$, $\left(1 - \frac{1}{11^n}\right) S_4 = S_5$ etc., dann fehlen in der Reihe S_1 alle Glieder, deren

*) Diese und noch andere aus der Betrachtung der vorstehenden Produkte abgeleitete Sätze findet man in Euler's *Introductio in analysin infinitorum. De partitione numerorum.*

**) Schlömilch's Handb. pag. 209.

Nenner durch 2 theilbar sind, in S_2 ausser diesen auch die durch 3 theilbaren, in S_3 überdies die durch 5, in S_4 ausser diesen auch noch alle durch 7 und in S_5 endlich auch noch alle durch 11 theilbaren Glieder. Man sieht, dass man auf diese Weise eine Reihe $S_r = 1 + \frac{1}{p_1{}^n} + \frac{1}{p_2{}^n} + \frac{1}{p_3{}^n} + \ldots$ ableiten kann, in welcher mit Ausnahme der Einheit nur Glieder vorkommen, deren Nenner p_1, p_2, p_3 .... blos theilbar sind durch Primzahlen, welche grösser sind als die gegebene Primzahl p. Indem man sämmtliche so gebildete Gleichungen mit einander multiplicirt, findet man $\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) S = S_r$, aus welcher Gleichung (weil *lim* $S_r = 1$) $S = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\ldots}$ folgt, wenn man sich unter p eine unendlich grosse Zahl denkt. — Durch ein ähnliches Verfahren findet man die Reihe

$$b) = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3^n}\right)\left(1 - \frac{1}{5^n}\right)\left(1 + \frac{1}{7^n}\right)\left(1 + \frac{1}{11^n}\right)\left(1 - \frac{1}{13^n}\right)\ldots}$$
$$= \frac{3^n}{3^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n + 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \frac{17^n}{17^n - 1} \cdots$$

und $c) = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n + 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdots$

62) und 63) Die Reihe $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = 1 + \frac{(1 - q^\alpha)\,(1 - q^\beta)}{(1 - q)\;\;(1 - q^\gamma)}\,x +$ $+ \frac{(1 - q^\alpha)\,(1 - q^{\alpha + 1})\,(1 - q^\beta)\,(1 - q^{\beta + 1})}{(1 - q)\;\,(1 - q^2)\;\;\;\;(1 - q^\gamma)\,(1 - q^{\gamma + 1})}\,x^2 + \ldots$, welche von Heine aufgestellt und einer sehr gründlichen Untersuchung unterworfen wurde*); besitzt viele interessante Eigenschaften, von welchen in Folgendem einige der einfachsten hervorgehoben werden mögen. — Die Reihe hängt, wie man sieht, von 5 Grössen ab, ändert sich nicht, wenn man α mit β vertauscht, so dass $\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\,(\beta, \alpha, \gamma, q, x)$, und bricht nur dann ab, wenn α oder β eine negative ganze Zahl ist. Ist $q = 1$, so nehmen die Coefficienten die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an, welche sich aber leicht auswerthen lässt, und man erhält die Gauss'sche hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha + 1)\,\beta(\beta + 1)}{1\,.\,2\;.\;\gamma(\gamma + 1)}\,x^2 + \ldots$. Ist ferner $q > 1$, so hat man sich blos der einfach nachweisbaren Formel

*) In Crelle's Journal, 34. Band, pag. 285.

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) = \varphi\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1}{q}, x q^{\alpha+\beta-\gamma-1}\right)$$

zu bedienen, um eine Funktion zu erhalten, in welcher das vierte Element $\frac{1}{q} = q'$ kleiner als 1 ist.

Das Element q also kleiner als 1 vorausgesetzt, convergirt die Reihe nur dann, wenn $-1 < x < +1$ ist. — Folgende Gleichungen wird man ohne Mühe beweisen:

1) $\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \varphi(\alpha, \gamma, \gamma, q, x) = \varphi(\alpha, 1, 1, q, x)$

2) $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) =$

$$= \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)} x \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x)$$

3) $\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, qx) = (1-x)\varphi(\alpha+1, \beta, \beta, q, x)$

4) $(1-q^\gamma)(1-q^{\alpha+\beta-\gamma-1}x)\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,x) - (1-q^\gamma)\varphi(\alpha-1,\beta,\gamma,q,x) +$
$+ q^{\alpha+\beta-\gamma-1} x (1-q^{\gamma-\beta}) \varphi(\alpha, \beta, \gamma+1, q, x) = 0.$

Durch wiederholte Anwendung der Gleichung 2) ist man im Stande, $\varphi(\alpha+n, \beta+n, \gamma+n, q, x)$ für jeden ganzzahligen Werth von n durch $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)$, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx)$, ... $\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^n x)$ auszudrücken. Setzt man in derselben Gleichung $\beta = \gamma$ und verbindet sie sodann mit 3), so erhält man die in der 62sten Aufgabe angegebene Relation, aus welcher die Produktenformel

$$5)\quad \frac{\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \beta, q, q^n x)} = \frac{1-q^\alpha x}{1-x} \cdot \frac{1-q^{\alpha+1}x}{1-qx} \cdots \frac{1-q^{\alpha+n-1}x}{1-q^{n-1}x}$$

folgt, die für $n = \infty$ (wegen $\lim \varphi(\alpha, \beta, \beta, q, q^n x) = 1$) in:

$$6)\quad \varphi(\alpha, \beta, \beta, q, x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1-q^{\alpha+n}x}{1-q^n x} \text{ übergeht.}$$

Aus 6) erhält man nun sehr einfach folgende Formeln:

$$\varphi(-m, \beta, \beta, -q^m x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1+q^n x)}{(1+q^{m+n}x)},$$

$$\varphi(-\infty, \beta, \beta, q, -q^\infty x) = \prod_{n=0}^{\infty} (1+q^n x),$$

$$\varphi(\infty, \beta, \beta, q, -x) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(1+q^n x)}.$$

Um die Produktenformel der 63sten Aufgabe zu erhalten, setze man in 4) $x = q^{\gamma-\alpha-\beta}$ und $\alpha+1$ an der Stelle von α; man findet hiedurch

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \frac{1-q^{\gamma-\beta}}{1-q^{\gamma}} \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma+1, q, q^{\gamma-\alpha-\beta})$$

und aus dieser Gleichung sehr einfach die folgende:

$$\varphi(\alpha,\beta,\gamma,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \varphi(\alpha+n,\beta,\gamma+n,q,q^{\gamma-\alpha-\beta}) \cdot \prod_{n=0} \left[\frac{1-q^{\gamma+n-\beta}}{1-q^{\gamma+n}}\right].$$

Für *lim* n $= \infty$ übergeht

$$\varphi(\alpha+n, \beta, \gamma+n, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) \text{ in } \varphi(1, \beta, 1, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) =$$

$$= \varphi(\beta, 1, 1, q, q^{\gamma-\alpha-\beta}) = \prod_{n=0}^{n=\infty} \left[\frac{1-q^{\gamma+n-\alpha}}{1-q^{\gamma+n-\alpha-\beta}}\right] \text{ etc.}$$

64) Ausgehend von der leicht nachweisbaren Gleichung $\gamma \cdot F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = (\gamma-\beta) F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, 1)$ findet man

$$F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\gamma-\beta}{\gamma} \cdot \frac{\gamma+1-\beta}{\gamma+1} \cdot \frac{\gamma+2-\beta}{\gamma+2} \cdots \frac{\gamma+n-1-\beta}{\gamma+n-1} \cdot F(\alpha+n,\beta,\gamma+n,1)$$

$$= \frac{1.2.3 \ldots . n . n^{\gamma-1}}{(\gamma-1+1)(\gamma-1+2)\ldots(\gamma-1+n)} \times$$

$$\times \frac{(\gamma-\beta-1+1)(\gamma-\beta-1+2)\ldots(\gamma-\beta-1+n)}{1.2.3 \ldots . n . n^{\gamma-\beta-1}} \cdot \frac{F(\alpha+n,\beta,\gamma+n,1)}{n^{\beta}}.$$

Setzt man $\psi(n, a) = \dfrac{1.2.3 \ldots . n . n^{a}}{(a+1)(a+2)\ldots.(a+n)}$, so ist:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\psi(n, \gamma-1)}{\psi(n, \gamma-\beta-1)} \cdot \frac{F(\alpha+n, \beta, \gamma+n, 1)}{n^{\beta}} \text{ und daher}$$

$$F(0, \beta, \gamma-\alpha, 1) = \frac{\psi(n, \gamma-\alpha-1)}{\psi(n, \gamma-\beta-\alpha-1)} \cdot \frac{F(n, \beta, \gamma+n, 1)}{n^{\beta}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt aber für n $= \infty$

$$\frac{F(\alpha,\beta,\gamma,1)}{(F\,0,\beta,\gamma-\alpha,1)} = F(\alpha,\beta,\gamma,1) = \frac{\lim \psi(n,\gamma-1)}{\lim \psi(n,\gamma-\alpha-1)} \cdot \frac{\lim \psi(n,\gamma-\beta-\alpha-1)}{\lim \psi(n,\gamma-\beta-1)}$$

und es erübrigt noch zu zeigen, dass sich die Funktion $\psi(n, a)$ für beliebige endliche a einer bestimmten endlichen Grenze nähere, wenn n ins Unendliche wächst, was auf folgende Weise geschehen kann. Es ist nämlich

$$\frac{\psi(n, a)}{\psi(n-1, a)} = \left(\frac{1}{1+\frac{a}{n}}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-a} = 1 + \frac{a(a+1)}{2n^2} + \frac{r_n}{n^3} \ldots.$$

und r_n endlich für jedes n. Setzt man also

$$k_n = \frac{a(a+1)}{2} + \frac{r_n}{n}, \text{ so ist: } \frac{\psi(n, a)}{\psi(n-1, a)} = 1 + \frac{k_n}{n^2}, \text{ und ferner}$$

$$\psi(n, a) = \psi(1, a)\left(1+\frac{k_2}{2^2}\right)\left(1+\frac{k_3}{3^2}\right)\ldots\left(1+\frac{k_n}{n^2}\right).$$

Da aber $lim\, k_n = \frac{a(a+1)}{2}$ eine endliche Grösse ist, so ist die Reihe $\frac{k_2}{2^2} + \frac{k_3}{3^2} + \frac{k_4}{4^2} + \ldots$ eine unbedingt convergirende, folglich convergirt auch das unendliche Produkt $\left(1 + \frac{k_2}{2^2}\right)\left(1 + \frac{k_3}{3^2}\right) \ldots$ und

$$lim\, \psi(n, a) = lim \frac{1.2.3\ldots n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)} \cdot n^a =$$

$$= lim \frac{1.2\ldots n}{(a+1)\ldots(a+n)} \cdot \left(1+\frac{1}{1}\right)^a \cdot \left(1+\frac{1}{2}\right)^a \ldots \left(1+\frac{1}{n}\right)^a$$

$$= \prod_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{n}{a+n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^a = \psi(a)$$ ist eine bestimmte endliche von Null verschiedene Grösse etc. *)

(Die gesuchte Gleichung erhält man auch aus der in der vorigen Aufgabe angegebenen Formel für $q = 1$.)

Zu IX.

12) c) Mittelst der Identität

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)(\alpha'\delta' - \beta'\gamma') = (\alpha\alpha' + \gamma\gamma')(\beta\beta' + \delta\delta') - (\alpha\beta' + \gamma\delta')(\beta\alpha' + \delta\gamma')$$

abzuleiten, indem man die in derselben vorkommenden Grössen so wählt, dass $\alpha\delta - \beta\gamma = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ und $\alpha'\delta' - \beta'\gamma' = a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2$ wird.

14) Drückt man den rechten Theil der Gleichung $e^y = tang\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$ durch Exponentialgrössen aus, so findet man $i e^y = \frac{i e^{xi} - 1}{i e^{xi} + 1}$ und hieraus $i e^{xi} = -\frac{i e^y + 1}{i e^y - 1}$, welche Gleichung man aber auch aus der vorhergehenden dadurch erhält, dass man y mit xi und x mit yi vertauscht. Wendet man diese erlaubte Vertauschung auf die Gleichung

$$y = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + \ldots.$$

an, so erhält man die zu beweisende Reihenentwicklung.

15) In der Binomialformel $(1 + x)^m = 1 + (m)_1 x + \ldots$ setze man einmal $x = \sqrt{-1} = i$ und dann $x = -i$, so erhält man Gleichungen, aus welchen man durch Verbindung mit den folgenden $S_2 + S_4 = S_1 + S_3 = 2^{m-1}$ die Summen S_1, S_2, S_3, S_4 berechnen kann, deren reelle Werthe beziehungs-

*) Die hypergeometrische Reihe wurde zuerst von **Gauss** genauer untersucht in der Abhandlung „*Disquisitiones generales circa seriem infinitam.*" (*Comment. soc. Gotting. Tom. II. a.* 1812.)

weise sind: $2^{m-2}+2^{\frac{m}{2}-1}\sin\frac{m\pi}{4}$, $2^{m-2}-2^{\frac{m}{2}-1}\cos\frac{m\pi}{4}$, $2^{m-2}-2^{\frac{m}{2}-1}\sin\frac{m\pi}{4}$, $2^{m-2}+2^{\frac{m}{2}-1}\cos\frac{m\pi}{4}$. (Welcher Beschränkung ist der Exponent m unterworfen?)

16) Lässt man in der Gleichung $(1+\theta_r)^m S_0 + S_1\theta_r + \ldots + S_{p-1}\theta_r^{p-1}$ an die Stelle von θ_r die übrigen Wurzeln $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \ldots.$ der Gleichung $\theta^p - 1 = 0$ treten, so erhält man $p-1$ Gleichungen, aus welchen im Verein mit der obigen irgend eine der gesuchten Summen, z. B. S_k, dadurch gefunden wird, dass man jede der Gleichungen mit der $p-k^{ten}$ Potenz der in ihr vorkommenden Wurzel (— also beispielsweise obige Gleichung mit θ_r^{p-k}) multiplicirt und dann sämmtliche Gleichungen addirt. Der linke Theil der so entstehenden neuen Gleichung ist $(1+\theta_1)^m\theta_1^{p-k} + (1+\theta_2)^m\theta_2^{p-k} + \ldots. + (1+\theta_p)^m\theta_p^{p-k}$; im rechten Theile aber verschwinden alle Glieder bis auf jenes, welches S_k enthält, denn der Coefficient von S_l z. B. würde lauten $\theta_1^{p-k+l} + \theta_2^{p-k+l} + \ldots. + \theta_p^{p-k+l}$ und ist somit entweder Null, wenn l von k verschieden, oder p, wenn l gleich k ist.*) Also ist $pS_k = (1+\theta_1)^m\theta_1^{p-k} + (1+\theta_2)^m\theta_2^{p-k} + \ldots + (1+\theta_p)^m\theta_p^{p-k}$, und man hat nur noch die p Wurzeln durch ihre Werthe zu ersetzen, den rechten Theil auf die Form einer complexen Grösse zu bringen und pS_k dem reellen Theile derselben gleich zu setzen, während das imaginäre Glied verschwinden muss. (Gelten die so gewonnenen Relationen für jedes m?)

18) Siehe 16).

21) Wenn $l\left(\frac{a_1+i}{a_1-i}\right) = l\left(\frac{a_2+i}{a_2-i}\right) + l\left(\frac{A_1+i}{A_1-i}\right)$ — unter i die imaginäre Einheit verstanden — gesetzt wird, so folgt hieraus $A_1 = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2 - a_1}$.
Setzt man ferner:

$$\begin{aligned} l\left(\frac{A_1+i}{A_1-i}\right) &= l\left(\frac{a_3+i}{a_3-i}\right) + l\left(\frac{A_2+i}{A_2-i}\right)\\ l\left(\frac{A_2+i}{A_2-i}\right) &= l\left(\frac{a_4+i}{a_4-i}\right) + l\left(\frac{A_3+i}{A_3-i}\right)\\ &\vdots\\ l\left(\frac{A_{n-3}+i}{A_{n-3}-i}\right) &= l\left(\frac{a_{n-1}+i}{a_{n-1}-i}\right) + l\left(\frac{a_n+i}{a_n-i}\right), \end{aligned}$$

---

*) Es ist nämlich
$\theta_1^{p-k+l} + \theta_2^{p-k+l} + \ldots + \theta_p^{p-k+l} = \theta_1^{-k+l} + \theta_2^{-k+l} + \ldots + \theta_p^{-k+l}$ (wegen $\theta^p = 1$) und dieser Ausdruck ist offenbar $= p$, wenn $-k+l=0$ ist. Ist aber $-k+l$ nicht Null, so ist jedes Glied dieses Ausdruckes eine der p Wurzeln der Gleichung $\theta^p - 1 = 0$, in der Art, dass der Ausdruck die Summe der p Wurzeln ist, welche Summe im vorliegenden Falle Null ist.
Siehe Schlömilch's Handbuch pag. 348.

so müssen die Grössen $A_2, A_3, \ldots a_n$ den Gleichungen genügen:

$$A_2 = \frac{A_1 a_3 + 1}{a_3 - A_1},\ A_3 = \frac{A_2 a_4 + 1}{a_4 - A_2} \ldots\ldots a_n = \frac{A_{n-3} a_{n-1} + 1}{a_{n-1} - A_{n-3}},$$

und die Elimination von $A_1, A_2, \ldots A_{n-3}$ aus den obigen Gleichungen liefert die zu beweisende Relation

$$1)\ l\left(\frac{a_1 + i}{a_1 - i}\right) = l\left(\frac{a_2 + i}{a_2 - i}\right) + \ldots\ldots l\left(\frac{a_n + i}{a_n - i}\right),$$

in welcher alle Grössen bis auf a_n willkürlich sind. Lässt man in 1) an die Stelle von $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n-1}$ die Grössen $a_1 i, a_2 i, \ldots\ldots a_{n-1} i$ treten, so übergeht diese Gleichung in 2) $l\left(\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1}\right) = l\left(\frac{a_2 + 1}{a_2 - 1}\right) + \ldots + l\left(\frac{a_n + 1}{a_n - 1}\right)$, und die zur Berechnung von a_n dienenden Relationen lauten:

$$\frac{a_1 a_2 - 1}{a_1 - a_2} = A_1,\ \frac{A_1 a_3 - 1}{a_3 - A_1} = A_2,\ \frac{A_2 a_4 - 1}{a_4 - A_2} = A_3, \ldots \frac{A_{n-3} a_{n-1} - 1}{a_{n-1} - A_{n-3}} = a_n.$$

22) *b*) In der Gleichung 1) der vorigen Aufgabe setze man $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, woraus $a_3 = 3$ folgt etc.

d) aus *c*) durch Transformation von $l\left(\frac{5 + i}{5 - i}\right)$.

e) bis *i*) Dass jeder dieser Ausdrücke $= \frac{2}{i}\, l\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)$, zeigt man am einfachsten dadurch, dass man folgende Gleichungen, in welchen L_2 den Ausdruck $l\left(\frac{2 + i}{2 - i}\right)$ bezeichnet, und die übrigen Grössen eine analoge Bedeutung haben, mittelst der Formel 1) ableitet und dann zweckmässig untereinander verbindet:

$$L_1 = L_2 + L_3,\ L_2 = L_3 + L_7,\ L_3 = L_4 + L_{13} = L_5 + L_8,$$
$$L_4 = L_5 + L_{21},\ L_5 = L_6 + L_{31} = L_7 + L_{18},\ L_6 = L_7 + L_{43},$$
$$L_7 = L_8 + L_{57} = L_9 + L_{32} = L_{12} + L_{17}.$$

27) Man findet leicht für die unendliche Reihe

$$1 + q(1 + q) + q^2(1 + q + q^2) + q^3(1 + q + q^2 + q^3) + \ldots\ (q^2 < 1)$$

den Ausdruck $\frac{(1 - q^n)(1 - q^{n+1})}{(1 - q)(1 - q^2)}$ als summatorisches Glied und $\frac{1}{(1 - q)(1 - q^2)}$ als Summe der ganzen Reihe. Setzt man nun $q = x(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, — wobei $[x] < 1$ — so erhält man einerseits die vorgelegten Reihen und andererseits die Ausdrücke

$$\frac{1 - x\cos\varphi - x^2\cos 2\varphi + x^3\cos 3\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi + x^2)(1 - 2x^2\cos 2\varphi + x^4)},$$
$$\frac{x\sin\varphi + x^2\sin 2\varphi - x^3\sin 3\varphi}{(1 - 2x\cos\varphi + x^2)(1 - 2x^2\cos 2\varphi + x^4)}$$

als deren Summen.

28) und 29)

$$x \cos\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi + \ldots = 2 - 2\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}\,.\cos\frac{\psi}{2}$$

$$x \sin\varphi + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi + \ldots = 2\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}\,.\sin\frac{\psi}{2}$$

$$x\cos\varphi + \frac{1}{1.2}x^2\cos 2\varphi + \ldots = 3x\cos\varphi - \frac{4}{3} + \frac{4}{3}(1-2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3}{2}\psi$$

$$x\sin\varphi + \frac{1}{1.2}x^2\sin\varphi + \ldots = 3x\sin\varphi - \frac{4}{3}(1-2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{3}{2}}\cos\frac{3}{2}\psi$$

wobei $\cos\psi = \dfrac{1-x\cos\varphi}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}}$, $\sin\varphi = \dfrac{x\sin\varphi}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}}$.

Diese Formeln gelten, wenn x numerisch kleiner als 1, oder, für $[x] = 1$, wenn $\sin^2\varphi$ und $\cos^2\varphi$ nicht 1 sind.

31) $$\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\cos(2n+1)\varphi = \frac{1}{4}\, l\,\frac{1+2x\cos\varphi+x^2}{1-2x\cos\varphi+x^2}$$

$$\sum_0^\infty \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\cdot\sin(2n+1)\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arctang}\frac{2x\sin\varphi}{1-x^2}.$$

32) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctang}\dfrac{2x\cos\varphi}{1-x^2}$, $\dfrac{1}{4}\, l\,\dfrac{1+2x\sin\varphi+x^2}{1-2x\sin\varphi+x^2}$.

33) Es sei $S = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\sin^2 n\varphi$ und $s = \sum_1^\infty \frac{x^n}{n}\cos^2 n\varphi$, so ist

$$S + s = -\, l(1-x) \text{ und } s - S = -\frac{1}{2}\, l(1-2x\cos 2\varphi+x^2) \text{ etc.}$$

34) $$\frac{1}{8}\, l\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1+2x\cos 2\varphi+x^2}{1-2x\cos 2\varphi+x^2}\right],$$
$$\frac{1}{8}\, l\left[\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\frac{1-2x\cos 2\varphi+x^2}{1+2x\cos 2\varphi+x^2}\right].$$

Aus 33) abzuleiten.

35) $$\frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{4x(1-x^2)\cos^2\varphi}{(1-x^2)^2-4x^2\cos 2\varphi},$$
$$\frac{1}{4}\operatorname{arctang}\frac{4x(1-x^2)\sin^2\varphi}{(1-x^2)^2+4x^2\cos 2\varphi}.$$

Aus 33) abzuleiten.

36) $\dfrac{e^{x\sin\varphi}+e^{-x\sin\varphi}}{2}\cdot\cos(x\cos\varphi)$, $\dfrac{e^{-x\sin\varphi}-e^{x\sin\varphi}}{2}\cdot\sin(x\cos\varphi)$

37) $\dfrac{e^{x\sin\varphi}+e^{-x\sin\varphi}}{2}\cdot\sin(x\cos\varphi)$, $\dfrac{e^{x\sin\varphi}-e^{-x\sin\varphi}}{2}\cdot\cos(x\cos\varphi)$

38) $\frac{1}{2}\arccos\left[\sqrt{1-2x^2\cos\varphi+x^4}-x^2\right]$, $\frac{1}{2}\,l\,A$, wo

$$A=\sqrt{(1-2x^2\cos\varphi+x^4)}+x^2\pm\sqrt{\{2x^4-2x^2\cos\varphi+2x^2\sqrt{(1-2x^2\cos\varphi+x^4)}\}}$$

39) $$\frac{\sin(2x\cos\varphi)}{\frac{1}{2}\cos(2x\cos\varphi)+\frac{1}{4}e^{2x\sin\varphi}+\frac{1}{4}e^{-2x\sin\varphi}},$$

$$\frac{e^{2x\sin\varphi}-e^{-2x\sin\varphi}}{e^{2x\sin\varphi}+e^{-2x\sin\varphi}+2\cos(2x\cos\varphi)}.$$

42) Siehe VII 76).

43) $$r^{b-a}\cdot\frac{r^b\cos a\alpha-\cos(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos b\alpha+1},\quad r^{b-a}\cdot\frac{r^b\sin a\alpha+\sin(b-a)\alpha}{r^{2b}-2r^b\cos b\alpha+1}.$$

$r>1$, $a>0$, $b>0$, α reell.

44) und 45) Man bestimme vorerst für jede der Reihen

$$a)\quad x^{2n+1}+\sum_{p=1}\frac{C_p^{(2[n+p]-1)^2}}{(2n+2)\ldots\ldots(2n+2p+1)}\cdot x^{2n+2p+1}\ \text{und}$$

$$b)\quad x^{2n}+\sum_{p=1}\frac{C_p^{2^2(n+p-1)^2}}{(2n+1)\ldots\ldots(2n+2p)}\cdot x^{2n+2p}$$

die entsprechende Summe. Zu diesem Zwecke gehe man von den Gleichungen aus:

$$1)\quad \sin my=\sum(-1)^n\frac{m^{2n+1}y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$2)\quad \sin my=\sum(-1)^r\frac{m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots(m^2-(2r-1)^2)\sin^{2r+1}y}{(2r+1)!}$$

$$3)\quad \cos my=\sum(-1)^n\frac{m^{2n}x^{2n}}{2n!}$$

$$4)\quad \cos my=1+\sum(-1)^{r+1}\frac{m^2(m^2-2^2)(m^2-4^2)\ldots(m^2-4r^2)}{(2r+2)}\sin^{2r+2}y\ *)$$

und ordne die rechten Theile von 2) und 4) nach den steigenden Potenzen von m. Hiebei wird in 2) der Ausdruck

$$\frac{(-1)^r m(m^2-1^2)(m^2-3^2)\ldots\ldots(m^2-(2r-1)^2)}{(2r+1)!}\sin^{2r+1}y=$$

$$=(-1)^n\left[m^{2r+1}-C_1^{(2r-1)^2}m^{2r-1}+\ldots(-1)^{r-n}C_{r-n}^{(2r-1)^2}m^{2r+1}+\ldots\right]\frac{\sin^{2r+1}y}{(2r+1)!}$$

nur dann ein Glied mit m^{2n+1} — nämlich $\frac{(-1)^n\,C_{r-n}^{(2r-1)^2}\sin^{2r+1}y}{(2r+1)!}\cdot m^{2n+1}$ liefern, wenn $r\geqq n$. Man erhält also aus diesem Gliede alle übrigen die Potenz

---

*) Schlömilch's Handb. pag. 195, 254 u. 255.

m^{2n+1} enthaltenden, indem man in demselben $r = n, n+1, n+2, \ldots$ setzt, und der Coefficient von m^{2n+1} ist somit $(-1)^n \sum\limits_{p=0} \frac{C_p^{[2(n+p)-1]^2} \sin^{2n+2p+1} y}{(2n+2p+1)!}$, welcher nach einem bekannten Satze *) dem Coefficienten $(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ der entsprechenden Potenz in 1) gleich sein muss. Verbindet man beide Ausdrücke durch ein Gleichheitszeichen, so findet man nach hinlänglicher Vereinfachung, und nachdem $\sin y = x$ gesetzt wurde, $(\arcsin x)^{2n+1}$ als Summe der Reihe *a*). Auf ganz gleiche Weise ergiebt sich aus 3) und 4) $(\arcsin x)^{2n}$ als Summe von *b*) etc.

52) bis 55) aus 50) und 51) abzuleiten.

56) bis 63) Aus den vorhergehenden Gleichungen dadurch abzuleiten, dass man die reellen Grössen in imaginäre übergehen lässt.

64) *a*) Aus der bekannten Produktenformel

$$\Pi\left(1-\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{1}{2}x\pi i} + e^{-\frac{1}{2}x\pi i}\right),$$

in welcher für m alle positiven und negativen ungeraden Zahlen zu setzen sind, dadurch abzuleiten, dass man $x = \frac{z-q}{p}$ setzt.

b) In dem unendlichen Doppelprodukte $\Pi\left(1 - \frac{z}{mA + m'A'}\right)$, in welchem sich die Multiplikation über alle positiven und negativen ungeraden Zahlwerthe von m und m′ erstrecken soll, und der Quotient $\frac{A'}{A}$ nicht Null sein darf (der Convergenz wegen), denke man sich die Multiplikation zuerst nach m verrichtet, so findet man unter Benutzung der Gleichung *a*) $\dfrac{e^{\frac{z-m'A'}{2A}\pi i} + e^{\frac{m'A'-z}{2A}\pi i}}{e^{-\frac{m'A'\pi i}{2A}} + e^{\frac{m'A'\pi i}{2A}}}$ als allgemeines Glied des nunmehr einfachen Produktes. Hiebei erhält m′ alle positiven und negativen ungeraden Zahlwerthe, und wenn man je zwei Faktoren mit einander multiplicirt, welche numerisch gleiche m′ besitzen, so erhält man ferner $\frac{1 + (h^2 + h^{-2})k^{m'} + k^{2m'}}{(1+k^{m'})^2}$ als neues allgemeines Glied, in welchem nun m′ blos positive ungerade Werthe erhält. Nimmt man nun in dem Doppelprodukte die Multiplikation vorerst nach m′ vor, so findet man auf gleiche Weise als allgemeines Glied $\frac{1 + (h_1^2 + h_1^{-2})k_1^m + k_1^{2m}}{(1+k_1^m)^2}$, in welchem m ebenfalls alle positiven ungeraden Zahlwerthe annimmt. Verbindet man

*) Schlömilch's Handb. pag. 124.

nun diese beiden Produkte, deren allgemeine Glieder bestimmt wurden, durch ein Gleichheitszeichen, so erhält man die Gleichung *b*). Um die Gleichungen *c*) und *d*) zu erhalten, verfahre man mit den unendlichen Doppelprodukten $z \prod \left(1 - \frac{z}{nA + n'A'}\right)$ und $\prod \left(1 - \frac{z}{nA + mA'}\right)$, in welchem n und n' alle positiven und negativen geraden Zahlwerthe (die Null ausgenommen) annehmen auf analoge Weise. Durch Division der vorstehend angegebenen Doppelprodukte erhält man die sogenannten elliptischen Funktionen.

65) Das allgemeine Glied des Produktes $(S-1)\,\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^\beta)$ ist

$$\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\;\frac{(1-q^\beta x)\ldots(1-q^{\beta+m-1}x)\,z^m}{(1-q^\gamma)\ldots(1-q^{\gamma+m-1}x)}\,\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^\beta)$$

und lässt sich mittelst der in VIII, 62) aufgestellten Formel 5) in

$$\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})\,z^m}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\,\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^{\beta+m})$$

verwandeln. In diesem Ausdrucke ersetze man φ durch die zugehörige Reihe und verrichte die Multiplikation, so wird das die Potenz x^n enthaltende Glied lauten:

$$\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\;\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})}{(1-q)\ldots(1-q^n)}\,q^{\beta n+nm}\,z^m\,x^n$$

und man erhält offenbar alle diese Potenz enthaltenden Glieder des obigen Produktes, wenn man in dem letztgefundenen Ausdrucke für m alle positive ganze Zahlen, von 1 beginnend, setzt. Also ist der Coefficient von x^n in $(S-1)\,\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^\beta)$:

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})\,q^{\beta n}}{(1-q)\ldots(1-q^n)}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\,q^{nm}\,z^m$$

und folglich

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1}).q^{\beta n}}{(1-q)\ldots(1-q^n)}\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+m-1})\,q^{nm}\,z^m}{(1-q)\ldots(1-q^m)}\right\}=$$

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})}{(1-q)\ldots(1-q^n)}\,q^{\beta n}\,\varphi(\alpha, 1, 1, q, zq^n)=$$

$$\frac{(1-q^{\gamma-\beta})\ldots(1-q^{\gamma-\beta+n-1})}{(1-q)\ldots(1-q^n)}\;\frac{(1-z)\ldots(1-q^{n-1}z)}{(1-q^\alpha z)\ldots(1-q^{\alpha+n-1}z)}\,q^{\beta n}\,\varphi(\alpha, 1, 1, q, z)$$

der Coefficient derselben Potenz in dem nach den steigenden Potenzen von x geordneten Produkte $S\,\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^\beta)$.

Hiemit sind alle Glieder des Produktes gegeben bis auf das Anfangsglied, welches $\varphi(\alpha, 1, 1, q, z)$ ist, und man hat, um die Gleichung *a*) zu erhalten, nunmehr die Funktionen $\varphi(\alpha, 1, 1, q, z)$ und $\varphi(\gamma-\beta, 1, 1, q, xq^\beta)$

nach Formel 6) (Resultate VIII, 62) in Produkte zu verwandeln. Jenachdem man in $a)$ $x = 1$ und $z = q^r$ oder $x = 1$ und $z = q^{\gamma - \alpha - \beta}$ setzt, erhält man die Gleichung $b)$ oder $c)$ und überzeugt sich leicht, dass die letztere nicht verschieden ist von der Gleichung, welche die 63. Aufgabe des VIII. Cap. enthält.

Um die Gleichung $\alpha)$ zu erhalten, setze man in $a)$

$$\alpha = 1, \ \gamma = \beta + 1, \ x = q^{-\beta} \xi,$$

so erhält man zunächst die Formel

$$\frac{1}{1 - \xi} + \frac{z}{1 - q\xi} + \frac{z^2}{1 - q^2 \xi} + \ldots = \frac{1}{1 - z} + \frac{\xi}{1 - qz} + \frac{\xi^2}{1 - q^2 z}$$

In derselben setze man nun q^2 an die Stelle von q, q statt ξ, $q e^{2ix}$ statt z, multiplicire beiderseits mit $\sqrt{q} \, . \, e^{ix}$ und drücke schliesslich die Exponentialgrössen durch goniometrische Funktionen aus.

Die Formeln $\beta)$ $\gamma)$ $\delta)$, welche für die höhere Analysis von besonderer Wichtigkeit sind, erhält man auf folgende Weise: In $\beta)$ wende man auf die Funktionen φ die oben citirte Formel 6) an, und man erhält nach leichter Rechnung den zweiten Theil der Gleichung. Um ferner den dritten Theil zu finden, ersetze man diese Funktionen durch die entsprechenden Reihen, und bestimme deren Produkt; man erhält so eine Reihe von der Form $c_0 + 2c_1 \cos 2x + 2c_2 \cos 4x + \ldots + 2c_n \cos 2nx$, in welcher

$$c_n = \prod_{n=1}^{n} \frac{(1 - q^{\alpha + n - 1})}{1 - q^n} q^{\frac{n}{2} - n\alpha} \, . \, \varphi(\alpha, \alpha + n, n + 1, q, q^{1 - 2\alpha})$$

mittelst der Formel 63) Cap. VIII zu transformiren ist.

Die Gleichungen $\gamma)$ und $\delta)$ folgen aus $\beta)$, indem man q^2 statt q und entweder $\alpha = \infty$ oder $\alpha = -\frac{1}{2}$ setzt.

$$66) \ a) \ \frac{\Omega(q, \gamma - 1) \, \Omega(q, \gamma - \alpha - \beta - 1)}{\Omega(q, \gamma - \alpha - 1) \, \Omega(q, \gamma - \beta - 1)}$$

Zu X.

1) Das Bildungsgesetz ist leicht erkennbar, wenn man die einzelnen Glieder der Ausdrücke als Combinationsformen auffasst, und jene Glieder beachtet, welche man hinzuzufügen hätte, um in jeder Gruppe gleicher Elementenzahl sämmtliche Combinationen der betreffenden Klasse zu erhalten.

2) Um p_n zu erhalten, gehe man von dem Gliede $a_2 a_3 a_4 \ldots a_n b_1$ aus und ersetze in diesem $a_2 a_3$ durch b_3, so erhält man $a_4 \ldots a_n b_1 b_3$ als zweites Glied des Ausdrucks. Nun ersetze man $a_3 a_4$ durch b_4, wodurch man das dritte Glied $a_2 a_5 \ldots a_n b_1 b_4$ findet. In den bereits gefundenen

Gliedern ersetze man ferner $a_4\, a_5$ durch b_5, dann in sämmtlichen bereits gebildeten, wo es angeht, $a_5\, a_6$ durch b_6 u. s. f., bis man zuletzt in allen Gliedern, wo es thunlich ist, $a_{n-1}\, a_n$ mit b_n vertauscht. Die Summe aller so gefundenen Ausdrücke ist p_n. Auf ähnliche Weise wird q_n gebildet. Der Beweis für die allgemeine Giltigkeit des Verfahrens bleibe dem Leser überlassen.

$$3)\ c) \begin{cases} \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} = \dfrac{a^{n-1} b^{n-1} + (2n-3)_1\, a^{n-2} b^{n-2} + (2n-4)_2\, a^{n-3} b^{n-3} + \ldots}{a^n\, b^{n-1} + (2n-2)\, a^{n-1} b^{n-2} + (2n-3)_2\, a^{n-2} b^{n-3} + \ldots} \\ \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} = \dfrac{a^{n-1} b^n + (2n-2)_1\, a^{n-2} b^{n-1} + (2n-3)_2\, a^{n-3} b^{n-2} + \ldots}{a^n\, b^n + (2n-1)\, a^{n-1} b^{n-1} + (2n-2)_2\, a^{n-2} b^{n-2} + \ldots} \end{cases}$$

$$f)\quad \frac{a\, b^{n-1} + (n-2)\, a^3 b^{n-3} + (n-3)_2\, a^5 b^{n-5} + \ldots}{b^n + (n-1)\, a^2 b^{n-2} + (n-2)_2\, a^4 b^{n-4} + \ldots}$$

4) *a*) Wenn $\dfrac{b - b_n}{a - a_n} = \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p_1}{q_1}, \ldots \dfrac{p_r}{q_r} \ldots \dfrac{p_n}{q_n}\right]$ gesetzt wird, so ist

$$p = b, \quad p_1 = \frac{a b_1 - a_1 b}{b} \quad p_2 = \frac{(a_2 - a)(b_1 - b) - (b_2 - b)(a_1 - a)}{a_1 b - a b_1}$$

$$q = a, \quad q_1 = \frac{b - b_1}{b} \qquad q_2 = \frac{a_2 b - a b_2}{a_1 b - a b_1}$$ und allgemein:

$$p_r = \frac{(a_r - a)(b_{r-1} - b) - (a_{r-1} - a)(b_r - b)}{(a_{r-2} - a)(b_{r-1} - b) - (a_{r-1} - a)(b_{r-2} - b)}$$

$$q_r = \frac{(a_{r-2} - a)(b_r - b) - (a_r - a)(b_{r-2} - b)}{(a_{r-2} - a)(b_{r-1} - b) - (a_{r-1} - a)(b_{r-2} - b)}$$

Dieser Kettenbruch lässt eine bemerkenswerthe geometrische Deutung zu. Betrachtet man nämlich $a, a_1, a_2, \ldots$ und $b, b_1, b_2, \ldots$ als Coordinaten von Punkten $M_0, M_1, M_2 \ldots$ der Ebene in Bezug auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem XOY, so ist $(a_s - a)(b_z - b) - (a_z - a)(b_s - b)$ der Ausdruck für die doppelte Fläche des Dreieckes $M_0\, M_s\, M_z$, wenn man diese als positiv oder negativ betrachtet, jenachdem die durch die Ordnung der Punkte M_0, M_s, M_z bestimmte Drehung mit jener, wodurch positive Winkel beschrieben werden, von einerlei Sinn ist oder nicht. Daher ist

$$p_r = \frac{M_0\, M_r\, M_{r-1}}{M_0\, M_{r-2}\, M_{r-1}} \text{ und } q_r = \frac{M_0\, M_{r-2}\, M_r}{M_0\, M_{r-2}\, M_{r-1}}$$

Da aber dieses Bildungsgesetz erst von $r = 3$ an ununterbrochen stattfindet, so leite man aus dem obigen Kettenbruche den folgenden $q_2 + \left[\dfrac{p_3}{q_3}, \ldots \dfrac{p_n}{q_n}\right]$ ab. Zu diesem Zwecke setze man $\left[\dfrac{p_3}{q_3}, \ldots \dfrac{p_n}{q_n}\right] = x$ und bestimme $q_2 + x$ aus der Gleichung $\dfrac{b - b_n}{a - a_n} = \left[\dfrac{p}{q}, \dfrac{p_1}{q_1}, \dfrac{p_2}{q_2 + x}\right]$, wodurch man $q_2 + x = \dfrac{p_2 (a\, b_n - a_n\, b)}{(a_1 - a)(b_n - b) - (a_n - a)(b_1 - b)} = p_2 \dfrac{O\ M_0\, M_n}{M_0\, M_1\, M_n}$ findet.

Also ist der gesuchte Kettenbruch $q_2 + \left[\frac{p_3}{q_3}, \dots \frac{p_n}{q_n}\right] = \frac{p_2\, O\, M_0 M_n}{M_0 M_1 M_n}$.
Ersetzt man in dieser Gleichung sämmtliche p und q durch ihre Werthe, so findet man nach leichter Rechnung die Formel:

$$\frac{O M_0 M_n . M_0 M_2 M_1}{M_0 M_1 M_n} = O M_2 M_0 + \left[\frac{M_0 M_3 M_2 . O M_1 M_0}{M_0 M_1 M_3}, \dots \frac{M_0 M_n M_{n-1} . M_0 M_{n-3} M_{n-2}}{M_0 M_{n-2} M_n}\right]$$

aus welcher man für $n = 3$

$$M_0 O M_3 . M_0 M_1 M_2 = M_0 O M_2 . M_0 M_1 M_3 + M_0 M_3 M_2 . M_0 O M_1$$

und hiemit den folgenden bekannten geometrischen Satz erhält: Verbindet man die Eckpunkte eines Vierecks $O M_1 M_2 M_3$ geradlinig mit einem beliebigen 5^ten Punkte M_0 und zieht die Diagonalen $O M_2$ und $M_1 M_3$, so ist von den Dreiecken, welche die gemeinschaftliche Spitze M_0 besitzen, das Produkt der beiden auf den Diagonalen aufstehenden gleich der Summe der Produkte von je zwei auf gegenüber liegenden Seiten des Vierecks aufruhenden Dreiecken.*)

6) $a_0 = p_1,\ b_0 = p_1 p_2,\ a_r = p_{2r} + p_{2r+1},\ b_{r-1} = p_{2r-1} p_{2r}$.

7) Es ist $\frac{\alpha + x}{a} = \cfrac{\alpha}{a - \cfrac{a}{1 + \cfrac{\alpha}{x}}} = \cfrac{\alpha}{a - \cfrac{\alpha\beta}{\beta + \cfrac{\alpha\beta}{x}}}$. Setzt man nun

$x = \frac{\beta + y}{b}$, so ist also auch $x = \cfrac{\beta}{b - \cfrac{b\gamma}{\gamma + \cfrac{\beta\gamma}{y}}}$ und hieraus

$$\frac{\alpha\beta}{x} = \alpha\left(b - \cfrac{b\gamma}{\gamma + \cfrac{\beta\gamma}{y}}\right) \text{ etc.}$$

9) Ist $\frac{p_m}{q_m}$ der betreffende Näherungsbruch, so ist

$$\frac{p_m}{p_{m-1}} = \frac{a_m p_{m-1} + b_m p_{m-2}}{p_{m-1}} = a_m + \frac{b_m}{p_{m-1} : p_{m-2}} \text{ etc.}$$

11) Bezeichnet man den reducirten Werth von

$$a_s + \left[\frac{b_{s+1}}{a_{s+1}} \dots \frac{b_t}{a_t}\right] \text{ durch } \frac{p_{s,t}}{q_{s,t}}, \text{ so ist } p_{l,m+n} =$$
$$p_{m,m+n} \cdot p_{l,m-1} + b_m \cdot p_{l,m-2} \cdot q_{m,m+n}.$$

---

*) Siehe den Aufsatz des Verfassers „Geometrische Deutung der Kettenbrüche" in Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. Phys. XII. Jahrg. 3. Heft.

12) Der Fehler ist kleiner als $\frac{b_1 b_2 \ldots\ldots b_{n-m+1}}{q_{n-m} \cdot q_{n-m+1}}$ und grösser als $\frac{b_1 \ldots\ldots b_{n-m+1}}{q_{n-m}(q_{n-m+1} + b_{n-m+2} \cdot q_{n-m})}$.

13) β) Mittelst der Gleichungen α) findet man successive:

$(a_2, \ldots a_n, y) = \frac{1}{(a_1, x)}$, $(a_3, \ldots a_n, y) = \frac{1}{(a_2, a_1, x)}$, $(a_4, \ldots a_n, y) = \frac{1}{(a_3, a_2, a_1, x)}$, ... und endlich $(y) = \frac{1}{y} = \frac{1}{(a_n, a_{n-1}, \ldots a_1, x)}$, woraus $y = (a_n, a_{n-1}, \ldots\ldots a_1, x)$ folgt.

Unter Berücksichtigung von α) wird man aus den beiden Gleichungen $x = (a_1 \ldots y)$ und $y = (a_n \ldots x)$ leicht jene zugehörigen Werthe von x und y berechnen können, welche den Annahmen $y = 0$ oder ∞ und $x = 0$ oder ∞ entsprechen, und da die Gleichung $A + Bx + Cy + Dxy = 0$ auch von diesen Werthepaaren erfüllt werden muss, so erhält man hiemit die nöthige Anzahl von Bedingungsgleichungen zur Bestimmung der constanten Verhältnisse $\frac{A}{B}, \frac{A}{C}, \ldots$, mit deren Werthen die vorhergehende Gleichung übergeht in 1)

$$\{x - (a_1, \ldots a_n)\}\{y - (a_n, \ldots a_1)\} = (a_1, \ldots a_n)\{(a_n, \ldots a_1) - (a_n, \ldots a_2)\}$$
$$= (a_n, \ldots a_1)\{(a_1, \ldots a_n) - (a_1, \ldots a_{n-1})\}.$$

γ) In der Gleichung 1) ersetze man $y - (a_n, \ldots a_1)$ durch $\frac{1}{(y, a_n \ldots a_1)}$, ferner x durch $(a_1, \ldots a_n, y)$ und y durch a_{n+1}, so erhält man aus derselben, wenn man sich überdies der abkürzenden Bezeichnung $\varDelta(a_1 \ldots a_{s-1})$ für $(a_1 \ldots a_s) - (a_1 \ldots a_{s-1})$ bedient, folgende Gleichung:

$$\varDelta(a_1, \ldots a_n) = (a_{n+1}, \ldots a_1)(a_n, \ldots a_1)\varDelta(a_1, \ldots a_{n-1}),$$

aus welcher

$$\varDelta(a_1, \ldots a_{n-1}) = (a_n, \ldots a_1)(a_{n-1}, \ldots a_1)^2 \ldots\ldots (a_2, a_1)^2 (a_1)^2 \text{ oder}$$

2) $(a_n, \ldots a_1)\varDelta(a_1, \ldots a_{n-1}) = (a_n, \ldots a_1)^2 (a_{n-1}, \ldots a_1)^2 \ldots\ldots (a_2, a_1)^2 (a_1)$

folgt, mittelst deren 1) in

3) $\{x - (a_1, \ldots a_n)\}\{y - (a_n, \ldots a_1)\} = (a_n, \ldots a_1)^2 (a_{n-1}, \ldots a_1)^2 \ldots (a_2, a_1)^2 (a_1)^2$

übergeht.

Aber nach 1) ist auch

$$(a_n, \ldots a_1)\varDelta(a_1, \ldots a_{n-1}) = (a_n, \ldots a_1)\{(a_1, \ldots a_n) - (a_1, \ldots a_{n-1})\} =$$
$$(a_1, \ldots a_n)\{(a_n, \ldots a_1) - (a_n, \ldots a_2)\}$$

und hier entsteht, wie man sieht, der rechte Theil aus dem linken einfach dadurch, dass man die Elemente $a_1, a_2, \ldots a_n$ in umgekehrter Ordnung folgen lässt. Diese Vertauschung wird daher auch in 2) erlaubt sein, und liefern:

$$(a_n, \ldots a_1)^2 (a_{n-1}, \ldots a_1)^2 \ldots (a_2, a_1)^2 (a_1)^2 = (a_1, \ldots a_n)^2 (a_2, \ldots a_{n-1})^2 \ldots (a_{n-1}, a_n)^2 (a_n)^2$$

oder 4) $(a_n, \ldots a_1)(a_{n-1}, \ldots a_1) \ldots (a_2\, a_1)(a_1) = (a_1, \ldots a_n)(a_2, \ldots a_{n-1}) \ldots (a_{n-1}, a_n)(a_n)$.

12*

ε) Setzt man $(a, \dots f_m) = x$, $(a_1, \dots f_m) = x_1$, $(a_2, \dots f_m) = x_2$ etc., so ist 5) $x = (a, \dots f - x_1)$, $x_1 = (a_1, \dots f_1 - x_2)$ etc. Wenn man nun die Gleichung 3) auf 5) anwendet, also an die Stelle von x und y successive die Werthe x und $f - x_1$, x_1 und $f_1 - x_2$ etc. treten lässt, so erhält man mit Rücksicht auf 4) und das in δ) eingeführte Symbol die Relationen:

$$\{x - (a, \dots e)\}\,\{f - x_1 - (e, \dots a)\} = \frac{1}{((a, \dots e))^2},$$

$$\{x_1 - (a_1, \dots e_1)\}\,\{f_1 - x_2 - (e_1, \dots a_1)\} = \frac{1}{((a_1, \dots e_1))^2} \text{ etc.,}$$

aus welchen man einen Kettenbruch ableiten kann, der sich von dem gesuchten nur in der Form unterscheidet, und mit Zuhilfenahme der früher entwickelten Beziehungen zur völligen Uebereinstimmung gebracht werden kann.

η) Sollen die beiden Kettenbrüche $(a_1, \dots a_r, b_1, b_2, \dots b_m, a_{r+1}, \dots a_n)$ und $(a_1, \dots a_r, a_{r+1}, \dots a_n)$ einander gleich sein, so muss sich der Bruch $(b_1, b_2, \dots b_m, y)$ für jeden Werth von y auf $(y) = \frac{1}{y}$ reduciren, und daher zwischen diesen Grössen nach β) Gleichung 4) die Gleichung bestehen:

$$\left\{\frac{1}{y} - (b_1, \dots b_m)\right\}\{y - (b_m, \dots b_1)\} = (b_m, \dots b_1)^2 (b_{m-1}, \dots b_1)^2 \dots (b_1)^2 = \frac{1}{((b_1, \dots b_m))^2}$$

oder:

$$(b_1, \dots b_m)\, y^2 - \left\{1 + (b_m, \dots b_1)(b_1, \dots b_m) - \frac{1}{((b_1, \dots b_m))^2}\right\} y + (b_m, \dots b_1) = 0,$$

welcher bei der völligen Unbestimmtheit von y nur genügt werden kann,

$$\text{wenn } (b_1, \dots b_m) = \frac{((b_2, \dots b_m))}{((b_1, \dots b_m))} = 0$$

$$(b_m, \dots b_1) = \frac{((b_1, \dots b_{m-1}))}{((b, \dots b_m))} = 0$$

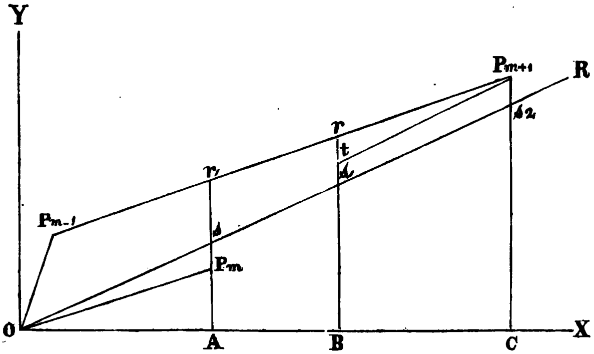
und $1 + (b_1, \dots b_m)(b_m, \dots b_1) - \frac{1}{((b_1, \dots b_m))^2} = 0$ gesetzt wird, woraus 6) $((b_2, \dots b_m)) = 0$, $((b_1, \dots b_{m-1})) = 0$ und $((b_1, \dots b_m)) = \pm 1$ folgt. Diese Gleichungen lassen sich durch andere ersetzen. Wenn man nämlich die letzte der Formeln δ) auf 6) anwendet, so findet man die Gleichung 7) $((a_2, \dots a_{n-1})) = +1$, wenn man nur das Vorzeichen $+$ beibehält. Wendet man ferner die leicht nachweisbare Formel $((b_r, \dots b_s)) = b_r((b_{r+1}, \dots b_s)) - ((b_{r+2}, \dots b_s)) = b_s((b_r, \dots b_{s-1})) - ((b_r, \dots b_{s-2}))$ auf die beiden ersten der Gleichungen 6) an, so findet man mit Rücksicht auf 7) schliesslich $b_1 = ((b_3, \dots b_{m-1}))$ und $b_m = ((b_2, \dots b_{m-2}))$. *)

14) α) Es seien $P_1, P_2, P_3, \dots$ die Punkte, welche beziehungsweise die Coordinaten (q_1, p_1), (q_2, p_2), $(q_3, p_3) \dots$ besitzen, und O der Anfangspunkt des Coordinatensystems. Zieht man durch P_1 eine Parallele zur

*) Siehe: Möbius, „Beiträge zur Lehre von den Kettenbrüchen" im 6. Bande von Crelle's Journal, pag. 218.

Richtung $O P_2$ bis zum Durchschnitte mit der Geraden, welche parallel zur Ordinatenachse im Abstande $q_2 a_3 + q_1$ gezogen wird, so erhält man den Punkt P_3; denn seine Coordinaten sind $q_2 a_3 + q_1 = q_3$ und $p_2 a_3 + p_1 = p_3$. Auf ähnliche Weise kann man den Punkt P_4 aus den beiden Punkten P_2 und P_3 ableiten u. s. f. Da nun die beiden Dreiecke $O P_2 P_1$ und $O P_2 P_3$ die gemeinschaftliche Grundlinie $O P_2$ besitzen, und deren Scheitel P_1 und P_3 in einer Parallelen zur Grundlinie liegen, so sind sie flächengleich. Aber auch die Dreiecke $O P_2 P_3$ und $O P_4 P_3$ sind flächengleich, denn auch sie besitzen eine gemeinschaftliche Grundlinie, nämlich $O P_2$, und $P_2 P_4$ ist der Construction zu Folge parallel zu $O P_3$. Ebenso leicht überzeugt man sich von der Gleichheit der beiden Flächen $O P_3 P_4$ und $O P_5 P_4$ etc. Diese Flächen durch ihre Coordinaten ausgedrückt, findet man also:
$p_1 q_2 - p_2 q_1 = p_3 q_2 - p_2 q_3 = p_3 q_4 - p_4 q_3 = \ldots = \pm (p_{m+1} q_m - p_m q_{m+1})$
und hieraus, wegen $p_1 q_2 - p_2 q_1 = 1$, $p_{m+1} q_m - p_m q_{m+1} = \pm 1$.

β) (Siehe beistehende Fig.) Man ziehe die Geraden $O P_{m-1}$, $O P_m$, P_{m-1}, P_{m+1} und die Gerade OR, für welche die $\tang XOR$ dem Werthe des Kettenbruches $[a_1, \ldots a_n]$ gleich sein soll. Nach dem Vorhergehenden



wird die Gerade $P_{m-1} P_{m+1}$ parallel sein zu $O P_m$, und die Richtung OR wird zwischen $O P_{m-1}$ und $O P_m$ fallen, wenn wir m als eine gerade Zahl voraussetzen. Es seien ferner $\beta = OB$ und $\alpha = Br$ die Coordinaten des Punktes r, für welchen $r P_{m+1} = f . O P_m$ sein soll, unter f eine positive, ganze Zahl kleiner als a_{m+1} verstanden, und $t P_{m+1} \, // \, OR$. Aus der Figur ist nun ersichtlich, dass $P_m s = As - AP_m = q_m [a_1, \ldots a_n] - p_m$ und $s_1 r = Br - Bs_1 = \alpha - \beta [a_1, \ldots a_n]$. Ueberdiess sind die beiden Dreiecke $O P_m s$ und $P_{m+1} r t$ einander ähnlich, somit

$P_m s = \frac{tr}{f} < tr < s_1 r$, also $-(p_m - q_m [a_1, \ldots a_n]) < \alpha - \beta [a_1, \ldots a_n]$.

Andererseits ist auch $s_2 P_{m+1} < s_1 r$, daher auch

$$p_{m+1} - q_{m+1} [a_1, \ldots a_n] < \alpha - \beta [a_1, \ldots a_n].$$

Hiemit ist die von Lagrange angegebene Eigenschaft der Kettenbrüche bewiesen, wenn man noch bedenkt, dass alle Punkte, deren Coordinaten ganze, beziehungsweise zwischen p_m und p_{m+1}, q_m und q_{m+1} liegende Zahlen sind, der Strecke $r_1 P_{m+1}$ angehören. *)

15) Da $\lim \frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}} = \lim \frac{n(n+1)}{(n+3)^2} = 1 > 0$, so convergirt der Kettenbruch. **)

16) bis 23) conv.

24) bis 33) Für jeden dieser Kettenbrüche ist $\lim \left(\frac{a_n a_{n+1}}{b_{n+1}}\right) = 0$ und deshalb bedarf es eines anderen Kennzeichens, um über die Convergenz oder Divergenz entscheiden zu können Diess liefert folgender Satz:

„Der Kettenbruch $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right]$, in welchem alle a und b positiv sind, convergirt oder divergirt, jenachdem (wenigstens) eine oder keine der beiden Reihen

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{a_3}{b_3} + \frac{b_2 b_4}{b_1 b_3} \cdot \frac{a_5}{b_5} + \ldots \text{ und}$$

$$a_2 \frac{b_1}{b_2} + a_4 \frac{b_1 b_3}{b_2 b_4} + a_6 \frac{b_1 b_3 b_5}{b_2 b_4 b_6} + \ldots$$

divergirt.“ ***)

Behufs des Beweises gehe man von der bekannten Gleichung 1)

$$[k_1, k_2, \ldots k_n] = \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_2 q_3} - \ldots + \frac{(-1)^n}{q_{n-1} q_n}$$

aus und setze in derselben sämmtliche k positiv voraus, dann wird für das unbegrenzte Wachsen von n die im rechten Theile stehende Reihe convergiren, wenn ihre Glieder unbegrenzt abnehmen. Zur Convergenz des Kettenbruches ist also erforderlich, dass das Produkt $q_{n-1} q_n$ ins Unendliche wachse, und diess wird sicher der Fall sein, wenn die Reihe $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots$ divergirt. Denn aus der independenten Darstellung der Näherungsbrüche geht hervor, dass q_n, jenachdem n gerade oder ungerade ist, entweder auf die Form $1 + A$, oder $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots + k_n + B$ gebracht werden könne, wobei A und B positive Grössen sind; mithin wird auch $q_{n-1} q_n$ immer in der Form $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots k_n + C$ darstellbar sein (C eine positive Zahl), woraus das Obige folgt. Da die beiden Kettenbrüche $[k_1, k_2, \ldots]$ und $[k_2, k_3, \ldots]$ offenbar gleichzeitig convergiren, so folgt hieraus nach eben Bewiesenem, dass der Kettenbruch $[k_1, k_2 \ldots]$ auch dann convergirt, wenn die Reihe $k_2 + k_4 + k_6 + \ldots$

*) Die Idee, die Eigenschaften der Näherungsbrüche aus geometrischen Constructionen abzuleiten, gehört dem englischen Mathematiker Sylvester an; der obige Beweis wurde von dem italienischen Mathematiker Prof. Betti gegeben.

**) Schlömilch's Handb. pag. 280.

***) Stern, „Ueber die Kennzeichen der Conv. eines Kettenbruches“ im 37. Bande von Crelle's Journal, pag. 255.

divergirt. Angenommen nun, die beiden Reihen $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots$ und $k_2 + k_4 + k_6 + \ldots$ seien gleichzeitig convergent, dann wird in Folge dieser Annahme auch die Reihe $k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + \ldots$ und somit auch das unendliche Produkt $(1 + k_1)(1 + k_2)(1 + k_3) \ldots$. convergiren. Diess hat aber zur Folge, dass q_n nicht mit n ins Unendliche wächst, sondern vielmehr sich einer endlichen Grenze nähert. Denn aus der combinatorischen (independenten) Bildung der Näherungsbrüche ersieht man, dass $q_n < 1 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots C_n^n$, wobei die Combinationen aus den Elementen $k_1, k_2, k_3, k_4 \ldots$ zu bilden sind. Der rechte Theil dieser Ungleichheit ist aber die Entwicklung des Produktes $(1 + k_1)(1 + k_2) \ldots (1 + k_n)$, dessen Grenzwerth endlich ist. Anderseits kann q_n nicht Null werden, also ist $\lim q_n$ ein endlicher Werth. Hiedurch wird die Reihe in 1) zu einer oscillirenden, somit oscillirt auch $\lim \frac{p_n}{q_n}$ je nach der Beschaffenheit von n zwischen verschiedenen Werthen und der Kettenbruch divergirt. Hiemit hat man den Eingangs aufgestellten Satz schon für Kettenbrüche der speciellen Form $[k_1, k_2, \ldots]$ bewiesen. Setzt man aber $k_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $k_2 = a_2 \frac{b_1}{b_1}$ und allgemein

$$k_{2m+1} = \frac{a_{2m+1}}{b_{2m+1}} \frac{b_{2m}}{b_{2m-1}} \ldots \frac{b_2}{b_1} \text{ und } k_{2m+2} = a_{2m+2} \frac{b_{2m+1}}{b_{2m+2}} \ldots \frac{b_1}{b_2},$$

so übergeht der Kettenbruch $[k_1, k_2 \ldots]$ in $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right]$ und die beiden Reihen $k_1 + k_3 + k_5 + \ldots$, $k_2 + k_4 + k_6 + \ldots$ werden identisch mit jenen im obigen Satze angeführten.

24) bis 26) conv. 27) und 28) div. 29) conv. oder div., jenachdem $\alpha \leqq 1$ oder $\alpha > 1$. 30) conv. 31) conv., wenn $k \leqq 2$. 32) div., wenn $k > 2$. 33) div., wenn $r > 0$.

34) bis 40) Sämmtliche Kettenbrüche sind in der Form

$$\left[\frac{b_1}{a_1}, -\frac{b_2}{a_2}, -\frac{b_3}{a_3}, - \ldots\right]$$

enthalten, welche sich mittelst der Identität

$$-\frac{b_m}{a_m + r} = -1 + \left[\frac{1}{1}, \frac{b_m}{a_m - b_m + r}\right] \text{ in } \left[\frac{b_1}{a_1 - 1}, \frac{1}{1}, \frac{b_2}{a_2 - b_2}, \frac{b_3}{a_3 - 1}, \ldots\right]$$

verwandeln lässt. Sind nun sämmtliche Zähler und Nenner der Glieder dieses neuen Kettenbruches > 0, so kann man die frühere Regel anwenden, und man findet: 34) bis 38) conv.

42) Unter der gemachten Voraussetzung convergirt der Kettenbruch. Bezeichnet man den Werth desselben durch f (m, n), so setze man

$$m - 1 + \frac{n-1}{f(m,n)} = a_1,\quad m - 2 + \frac{n-2}{a_1} = a_2,\quad m - 3 + \frac{n-3}{a_2} = a_3, \text{ etc.}$$

und berechne hieraus f (m, n) etc.

43) Die Gleichheit der beiden Kettenbrüche liefert den Satz: „Der unendliche Kettenbruch $\left[\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \ldots\right]$, in welchem sämmtliche a und b positive ganze Zahlen sind, und die Differenzen $b_n - b_{n-1}$ und $a_n - a_{n-1}$ für jedes n einen constanten positiven Werth besitzen, ist rational, wenn b_1 ein Vielfaches dieser Differenz und grösser als a_1 ist.

46) In der Gleichung $\frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1} q_n} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \cfrac{\frac{(-1)^{n-1}}{q^2_{n-1}}}{\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} + a_n}$ setze man $a_n + [a_1, a_2, \ldots a_n]$ an die Stelle von a_n etc., so findet man schliesslich $[a_1, a_2, \ldots] = \frac{1}{q_{n-1}}\left\{p_{n-1} + \left[\frac{(-1)^{n-1}}{q_n + p_{n-1}}, \frac{(-1)^{n-1}}{q_n + p_{n-1}}, \ldots\right]\right\}$.

49) Es ist $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = p - \cfrac{q}{p + \frac{b_n}{a_n}}$ etc.

51) Man setze $\sqrt{a^2 + b} = a + x$, so folgt hieraus einerseits 1) $x^2 + 2ax - b = 0$ und andererseits 2) $x = \frac{b - x^2}{2a}$. Man betrachte nun 1) als Stammgleichung und leite aus derselben neue Gleichungen ab, deren Wurzeln beziehungsweise die Quadrate, Biquadrate u. s. w. der Wurzeln der Stammgleichung sind. Diese Gleichungen sind:

$x_,^2 - (4a^2 + 2b)\ x_, + b^2 = x_,^2 - 2a_1 x_, + b_1 = 0\ (x_, = x^2)$

$x_{,,}^2 - (4a_1^2 + 2b_1)\ x_{,,} + b_1^2 = x_{,,}^2 - 2a_2 x_{,,} + b_2 = 0\ (x_{,,} = x_,^2 = x^4)$ etc.

und geben $x_, = \frac{b_1 + x_,^2}{2a_1}$, $x_{,,} = \frac{b_2 + x_{,,}^2}{2a_2}$, ..., wodurch 2) übergeht in

$$x = \cfrac{b - \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \ldots}{2a_2}}{2a_1}}{2a} \quad \text{etc.}$$

53) *a)* Die Reihe heisst nach ihrem berühmten Erfinder die Lambert'sche, und lässt sich, nach Clausen und Scherk, in die folgende verwandeln:

$$x\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right) + x^4\left(\frac{1 + x^2}{1 - x^2}\right) + x^9\left(\frac{1 + x^3}{1 - x^3}\right) + \ldots{}^{*}),$$

---

*) Es ist nämlich $\frac{x}{1 - x} = x + x^2 + x^3 + \ldots$

$$\frac{x^2}{1 - x^2} = x^2 + x^4 + x^6 + \ldots$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Summirt man diese für $x^2 < 1$ unbedingt convergirende Doppelreihe in der Art, dass man die erste Vertikal- und die erste Horizontalreihe zusammenfasst, und

welche man auch schreiben kann:

$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}+\frac{x^4}{1-x^2}+\frac{x^6}{1-x^2}+\dots+\frac{x^{n^2}}{1-x^n}+\frac{x^{n^2+n}}{1-x^n}+\dots$$

Aus dieser letzteren Reihe erhält man mittelst der Euler'schen Formel den angegebenen Kettenbruch.

b) Durch diese Gleichung ist die Irrationalität der Reihe

$$1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^9}+\dots$$

für alle positive oder negative ganze Werthe von x (die Einheit ausgenommen) bewiesen.

54) *a*) Wenn man für den Kettenbruch

$$F(x)=\left[\frac{1}{1},-\frac{\varrho_1 x}{1},-\frac{\varrho_2 x}{1},-\dots\right]$$

die Zähler und Nenner der Näherungsbrüche entwickelt, so findet man
$p_0=1$, $p_1=1$, $p_2=1-a_2 x$, $p_3=1-(a_2+a_3)x$,
$q_0=1$, $q_1=1-a_1 x$, $q_2=1-(a_1+a_2)x$, $q_3=1-(a_1+a_2+a_3)x+a_1 a_3 x^2$.
Allgemein ist ferner $p_{n+1}=p_n-\varrho_{n+1}x\,.\,p_{n-1}$ und $q_{n+1}=q_n-\varrho_{n+1}x\,q_{n-1}$; auch ersieht man leicht, dass p_{2n}, p_{2n+1}, q_{2n-1} und q_{2n} in Bezug auf x ganze rationale Funktionen vom n^{ten} Grade sind, deren absolutes Glied 1 ist. Es ist also sowohl q_{2n-1} als auch q_{2n} in der Form

$$1+c_1 x+c_2 x^2+c_3 x^3+\dots+c_n x^n$$

enthalten. Man denke sich nun diesen Kettenbruch in eine Potenzenreihe verwandelt, was nach dem eben Gesagten immer möglich ist, so wird diese bis auf die n^{te} Potenz incl. mit der Entwicklung von $\frac{p_n}{q_n}$ in eine aufsteigende Reihe übereinstimmen. Denn durch wiederholte Anwendung der bekannten Formel $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{\varrho_n x\,(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})}{q_{n-1}q_n}$ findet man leicht:

$$\frac{p_n}{q_n}=\left[\frac{1}{1},-\frac{\varrho_1 x}{1},+\dots-\frac{\varrho_n x}{1}\right]=1+\frac{\varrho_1 x}{q_0 q_1}+\frac{\varrho_1\varrho_2 x^2}{q_1 q_2}+\dots+\frac{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_n x^n}{q_{n-1}q_n}$$

und

$$F(x)=lim\frac{p_n}{q_n}=1+\frac{\varrho_1 x}{q_0 q_1}+\frac{\varrho_1\varrho_2 x^2}{q_1 q_2}+\dots+\frac{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_n x^n}{q_{n-1}q_n}+\frac{\varrho_1\varrho_2\dots\varrho_{n+1}x^{n+1}}{q_n q_{n+1}}+\dots,$$

---

mit der jeweilig verbleibenden Doppelreihe ebenso verfährt, und bedenkt, dass man bei einem solchen Vorgange die Diagonalglieder x, x^4, x^9 ... doppelt zählt; so erhält man die transformirte Reihe. Ordnet man dagegen nach Potenzen von x, so enthält jeder Coefficient so viele Einheiten, als der Exponent Theiler hat. Eine weitere bemerkenswerthe Transformation rührt von Eisenstein her. Nach dieser ist die Lambert'sche Reihe auch =

$$\frac{\frac{x}{1-x}-\frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)}+\frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}-\frac{4x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}+\dots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

daher $F(x) - \frac{p_n}{q_n} = \varrho_1 \varrho_2 \ldots \varrho_{n+1} x^{n+1} \left\{ \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{\varrho_{n+2} x}{q_{n+1} q_{n+2}} + \ldots \right\}$, woraus das Behauptete folgt. Betrachten wir jetzt getrennt die Fälle, in welchen n gerade oder ungerade ist. Im ersten Falle ist x^{2n+1} die niedrigste Potenz, welche in $F(x) - \frac{p_{2n}}{q_{2n}}$, also auch in $q_{2n} F(x) - p_{2n}$ vorkommen kann, und daher müssen in $q_{2n} F(x)$, — da p_{2n} blos vom n^{ten} Grade ist —, die Coefficienten der Potenzen $x^{n+1}, x^{n+2} \ldots . x^{2n}$ verschwinden. Im zweiten Falle ist in $F(x) - \frac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}}$, und somit auch in $q_{2n-1} F(x) - p_{2n-1}$, die Potenz x^{2n} die niedrigste, und da p_{2n-1} vom Grade $n-1$ ist, so müssen in $q_{2n-1} F(x)$ die Coefficienten der Potenzen $x^n, \ldots x^{2n-1}$ verschwinden. In beiden Fällen fehlen also genau so viele Potenzen, als das jedesmalige q Coefficienten c hat. Man denke sich nun die Multiplication des Ausdruckes $q_n F(x)$ wirklich ausgeführt, und das Produkt nach steigenden Potenzen von x geordnet, so wird der Coefficient von x^{n+r} in $q_{2n} F(x) = (1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots c_n x^n)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$ sein:

$$1)\ a_r c_n + a_{r+1} c_{n-1} + a_{r+2} c_{n-2} + \ldots + a_{n+r-1} c_1 + a_{n+r} = 0$$

und in $q_{2n-1} F(x) = (1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \ldots c'_n x^n)(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$

$$2)\ a_r c'_n + a_{r+1} c'_{n-1} + \ldots + a_{n+r-1} c'_1 + a_{n+r} = 0.$$

In 1) setze man successive $r = 1, 2, 3, \ldots n$, und in 2) $r = 0, 1, 2, \ldots n-1$, so erhält man zwei Gleichungssysteme 3) und 4), aus welchen sich die Constanten c und c′ berechnen lassen, wenn die Constanten a gegeben sind; d. h. man ist hiemit im Stande, jeden Näherungsbruch jenes Potenz-Kettenbruches zu berechnen, welcher aus der Verwandlung einer Potenzenreihe entsteht. Beschränkt man sich darauf, blos die Constanten ϱ zu ermitteln, so bestimme man aus den beiden Gleichungssystemen 3) und 4) c_n und c'_n; man findet:

$$5)\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix} c_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ a_3 & a_4 & \ldots a_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \ldots a_{2n} \end{vmatrix} \text{ und}$$

$$6)\ \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots a_{n+1} \\ a_1 & a_2 & \ldots a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots a_{2n-2} \end{vmatrix} c'_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots a_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots a_{2n-1} \end{vmatrix}$$

und kann aus diesen Gleichungen die Coefficienten von x^{n-1} in q_{2n-2} und von x^{n+1} in q_{2n+1}, welche wir durch c''_{n-1} und c'''_{n+1} bezeichnen wollen, leicht ableiten. Die Coefficienten c unterliegen aber, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, der Bedingung:

$$c_k - \varrho_{2n+1} c'_{k-1} = c'''_k \text{ und}$$
$$c'_k - \varrho_{2n} \,.\, c''_{k-1} = c_k$$

Demnach ist $\varrho_{2n+1} = -\frac{c'''_{n+1}}{c'_n}$ (wegen $c_{n+1} = 0$)

und $\varrho_{2n} \quad = -\frac{c_n - c'_n}{c''_{n-1}}$, und das ganze Problem der Entwicklung einer Potenzenreihe in einen Potenzkettenbruch ist somit auf die Ermittlung einer besonderen Gattung symmetrischer Determinanten reducirt. Diese Methode ist nicht mehr anwendbar, wenn die Determinanten verschwinden, was z. B. von einem gewissen ϱ_r ab jedesmal eintreten wird, wenn a_n eine ganze rationale Funktion von n ist In einem solchen Falle müssen recurrirende Rechnungsweisen angewendet werden.*)

b) Wir stellen uns die Aufgabe, die Reihe $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$ in einen Kettenbruch von der Form

$$\left[\frac{1}{m_1 x + n_1}, -\frac{1}{m_2 x + n_2}, -\frac{1}{m_3 x + n_3}, -\dots\right]$$

zu transformiren. Man überzeugt sich leicht, dass p_{n+1} und q_n bezüglich x ganze rationale Funktionen vom n^{ten} Grade sind, dass also

$$q_n = c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + \dots + c_n^{(n)} x^n.$$

Ferner weiss man, dass $\frac{\varphi_1}{\varphi_0} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{1}{q_n q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \dots$

woraus 2) $q_n \frac{\varphi_1}{\varphi_0} - p_n = (c_0^{(n)} + c_1^{(n)} x + \dots c_n^{(n)} x^n)\left(\frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \dots\right) - p_n =$

$\frac{1}{q_{n+1}} + q_n \left(\frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}} + \dots\right)$ folgt. Der rechte Theil dieser Gleichung kann nach fallenden Potenzen von x entwickelt werden, und fängt, da q_{n+1} von $n + 1^{ten}$ Grade ist mit $\frac{1}{x_{n+1}}$ an. Es verschwinden somit im linken Theile die Coefficienten von $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots \frac{1}{x^n}$ und jene von $x^0, x^1, \dots x^{n-1}$. Hiedurch erhält man zwei Gleichungssysteme. Aus dem erstern kann man die Constanten in q_n bis auf einen constanten Faktor bestimmen; nachdem diese gefunden, liefert das andere Gleichungssystem die Werthe der Constanten in p_n. Das erste Gleichungssystem lautet:

$$3) \left\{\begin{array}{llll} c_0^{(n)} a_0 & + c_1^{(n)} a_1 & + \dots + c_n^{(n)} a_n & = 0 \\ c_0^{(n)} a_1 & + c_1^{(n)} a_2 & + \dots + c_n^{(n)} a_{n+1} & = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ c_0^{(n)} a_{n-1} & + c_1^{(n)} a_n & + \dots + c_n^{(n)} a_{2n-1} & = 0 \end{array}\right.$$

*) Siehe Heine, „Ueber eine gewisse Reihe von allgemeiner Form" (Crelle's Journ. 34. Band), und Hankel, „Ueber eine besondere Classe der symmetrischen Determinanten." Inaugural-Dissertation.

und man findet aus denselben, wenn man die neue Unbekannte $\overline{\omega}_n$ durch die Gleichung 4) $c_n^{(n)} = \overline{\omega}_n \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_{n-1} \\ \vdots & \\ a_{n-1} & \dots a_{2n-1} \end{vmatrix}$ einführt.

$$q_n = \overline{\omega}_n \begin{vmatrix} a_0 & \dots a_n \\ \vdots & \\ a_{n-1} & \dots a_{2n-1} \\ 1 & \dots x^n \end{vmatrix}$$

Um nun $\overline{\omega}_n$ zu finden, bemerke man, dass in den beiden Theilen in 2) auch die Coefficienten von $\frac{1}{x^{n+1}}$ einander gleich sein müssen, wodurch man erhält 5) $c_0^{(n)} a_n + c_1^{(n)} a_{n+1} + \dots c_n^{(n)} a_{2n} = \frac{1}{c_{n+1}^{(n+1)}}$. In dieser Gleichung substituire man für $c_0^{(n)}$ bis $c_n^{(n)}$ die aus 3) gefundenen Werthe und für $c_{n+1}^{(n+1)}$ nach 4) den Ausdruck $\overline{\omega}_{n+1} \begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix}$, so übergeht 5) in

$$\begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix} \overline{\omega}_n = 1 : \overline{\omega}_{n+1} \begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix}, \text{ woraus } \begin{vmatrix} a_0 \dots a_n \\ \vdots \\ a_n \dots a_{2n} \end{vmatrix} \overline{\omega}_n \overline{\omega}_{n+1} = 1$$

folgt, aus welcher Gleichung $\overline{\omega}_n$ berechnet werden kann, sobald ω_1 durch ein directes Verfahren gefunden ist. *).

55) In 54) *a*) substituire man in die Gleichungen 1) und 2) für die Constanten a, die aus $F(\alpha, 1, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots$ folgenden Werthe, so erhält man, indem man m an die Stelle von n treten lässt, nach einigen Vereinfachungen, folgende Gleichungssysteme:

$$1) \begin{cases} c_m + \frac{\alpha+1}{\gamma+1} c_{m-1} + \dots \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)} = 0 \\ \vdots \\ c_m + \frac{\alpha+m}{\gamma+m} c_{m-1} + \dots + \frac{(\alpha+m)\dots(\alpha+2m-1)}{(\gamma+m)\dots(\gamma+2m-1)} = 0 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} c'_m + \frac{\alpha}{\gamma} c'_{m-1} + \dots \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+m-1)} = 0 \\ \vdots \\ c'_m + \frac{\alpha+m-1}{\gamma+m-1} c'_{m-1} + \dots + \frac{(\alpha+m-1)\dots(\alpha+2m-2)}{(\gamma+m-1)\dots(\gamma+2m-2)} = 0 \end{cases}$$

welche man am zweckmässigsten durch successive Elimination der Unbekannten auflöst. Man findet aus 2) $c'_n = (-1)^n (m)_n \frac{(m+\alpha-1)_n}{(\gamma+2m-2)_n}$

*) Hankel, „Ueber die Transformation von Reihen in Kettenbrüche.“ (Aus den Sitzungsberichten der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften, 1862.)

und hieraus durch Vertauschung von $\alpha + 1$ mit α und $\gamma + 1$ mit γ, $c_n = (-1)^n (m)_n \frac{(m+\alpha)_n}{(\gamma + 2m - 1)_n}$ (denn das System 2) übergeht durch diese Vertauschung in 1)). Diese Werthe in

$$q_{2m-1} = 1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \dots + c'_m x^m \text{ und}$$
$$q_{2m} = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_m x^m$$

substituirt, erhält man die angegebenen Formeln.

56) Aus der vorhergehenden Aufgabe dadurch abzuleiten, dass man $\gamma = 1$, $\frac{x}{\alpha}$ an die Stelle $+ \alpha$ setzt, und α ins Unendliche wachsen lässt. Auch direct lässt sich das Resultat leicht finden. Hiezu bemerke man, dass $\varrho_{2n} = -\frac{n}{(2n-1)\,2n}$ und $\varrho_{2n+1} = \frac{n}{2n\,(2n+1)}$.

57) $l(1+x) = x\,F(1, 1, 2, -x)$, $\varrho_{2n} = -\frac{n^2}{2n\,(2n+1)}$,

$$\varrho_{2n+1} = -\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)},$$
$$q_{2m} = 1 + (m)_1 \frac{(m+1)_1}{(2m+1)_1} x + (m)_2 \frac{(m+1)_2}{(2m+1)_2} x^2 + \dots,$$
$$q_{2m-1} = 1 + \frac{(m)_1^2}{(2m)_1} x + \frac{(m)_2^2}{(2m)_2} x^2 + \dots$$

58) Aus der angegebenen Formel leite man zunächst die Gleichung

$$1)\ \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)} =$$
$$= \cfrac{1}{1 - q^\beta x \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\gamma-\beta})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} \cdot \frac{\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}}$$

ab, und wende dieselbe auf den im rechten Theil vorkommenden Quotienten $\frac{\varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}$ an, indem man $\alpha + 1$ statt α, und $\gamma + 1$ statt γ setzt u. s. w.; so findet man den gesuchten Kettenbruch. Es ist erlaubt, den Kettenbruch ins Unendliche fortzusetzen, denn das Restglied $\varrho_{2n} \frac{\varphi(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1, q, x)}{\varphi(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n, q, x)}$ convergirt gegen die Null, da $\varrho_{2n} = \frac{q^{\alpha+n-1}(1-q^{\beta+n})(1-q^{\gamma+n-\alpha})}{(1-q^{\gamma+2n-1})(1-q^{\gamma+2n})}$ und

$$\varrho_{2n+1} = q^{\beta+n} \frac{(1-q^{\alpha+n})(1-q^{\gamma+n-\beta})}{(1-q^{\gamma+2n})(1-q^{\gamma+2n+1})}.$$

Von den übrigen Gleichungen erhält man die ersten vier aus den Formeln:

$$2)\ \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$$
$$= q^\alpha x \frac{(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)} \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x)$$

3) $\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$
$= q^\beta x \dfrac{(1-q^\alpha)}{(1-q^\gamma)} \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x)$

4) $\varphi(\alpha-1, \beta+1, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$
$= - q^{\alpha-1} x \dfrac{(1-q^{\beta-\alpha+1})}{(1-q^\gamma)} \varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)$

5) $\varphi(\alpha+1, \beta-1, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) =$
$= q^\alpha x \dfrac{(1-q^{\beta-\alpha-1})}{(1-q^\gamma)} \varphi(\alpha+1, \beta, \gamma+1, q, x)$

und die letzte aus der Verbindung von
$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x) - \varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, qx) =$
$= \dfrac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q^\gamma)} x \varphi(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, q, x)$ mit 2) und 1).

60) Der gesuchte Kettenbruch ist ein besonderer Fall des in Nr. 58) für $\dfrac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, q, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, q, x)}$ gefundenen und aus diesem zu erhalten, wenn $\beta = 0$ und γ für $\gamma+1$ gesetzt wird. Um die Nenner Q_{2n-1} und Q_{2n} zu finden, substituire man in die Gleichung 2) Nr. 54 *a*) der „Resultate" für die Constanten a die Werthe, welche aus

$\varphi(\alpha, 1, \gamma, q, x) = 1 + \dfrac{1-q^\alpha}{1-q^\gamma} x + \dfrac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})}{(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})} x^2 + \ldots.$ folgen.

Hiedurch erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$c'_n + c'_{n-1} \frac{1-q^\alpha}{1-q^\gamma} + \ldots + \frac{(1-q^\alpha)\ldots(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^\gamma)\ldots(1-q^{\gamma+n-1})} = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$c'_n + c'_{n-1} \frac{(1-q^{\alpha+n-1})}{(1-q^{\gamma+n-1})} + \ldots + \frac{(1-q^{\alpha+n-1})(1-q^{\alpha+2n-2})}{(1-q^{\gamma+n-1})(1-q^{\gamma+2n-2})} = 0$$

aus welchem man die zu Q_{2n-1} gehörigen c' berechnen kann. Ersetzt man in diesen Gleichungen α durch $\alpha+1$ und γ durch $\gamma+1$, so erhält man ein neues System, welches die Constanten c des Nenners Q_{2n} liefert. Die Unbekannten successive elimirend, findet man:

$$c'_s = (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s-1)} \frac{(1-q^n)\ldots(1-q^{n+1-s})}{(1-q)\ldots(1-q^s)\ \ldots\ldots\ldots\ldots} \cdot \frac{(1-q^{\alpha+n-1})\ldots(1-q^{\alpha+n-s})}{(1-q^{\gamma+2n-s-1})}$$

und

$$c_s = (-1)^s q^{\frac{1}{2}s(s-1)} \frac{(1-q^n)\ldots(1-q^{n+1-s})}{(1-q)\ldots(1-q^s)} \cdot \frac{(1-q^{\alpha+n})\ldots(1-q^{\alpha+n+1-s})}{(1-q^{\gamma+2n-1})\ldots(1-q^{\gamma+2n-s})}$$

und mit diesen Werthen aus

$$Q_{2n-1} = 1 + c'_1 x + c'_2 x^2 + \ldots + c'_n x^n \text{ und}$$
$$Q_{2n} \;= 1 + c x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

die ersten zwei der gesuchten Formeln. ((*a*) und *b*)).

Um die zwei letzten Formeln zu beweisen, beachte man, dass, wenn

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} = \left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_1 x}{1}, \ldots -\frac{\varrho_{2n} x}{1}\right]$$

gesetzt wird, hieraus $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}} = \left[\frac{1}{1}, -\frac{\varrho_{2n} x}{1}, -\frac{\varrho_{2n-1} x}{1}, \ldots -\frac{\varrho_1 x}{1}\right]$ folgt. *) Substituirt man für die Grössen ϱ die in Nr. 58) angegebenen Werthe, so zeigt die Vergleichung des so gefundenen neuen Kettenbruches mit jenem in 58), dass ersterer in seiner ganzen Ausdehnung mit dem Anfange der Entwicklung von

$$1) \quad \frac{\varphi(-n-\beta, 1-n-\alpha, 1-\gamma-2n, q, q^{\alpha+\beta-\gamma} x)}{\varphi(-n-\beta, -n-\alpha, -\gamma-2n, q, q^{\alpha+\beta-\gamma} x)}$$ übereinstimmt.

Es gibt zwei Annahmen, für welche 1) mit $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}}$ identisch wird, nämlich $\beta = 0$, oder $\gamma = \alpha$, weil in beiden Fällen 1) da abbricht, wo die Glieder anfangen würden, welche nicht mehr in $\frac{Q_{2n-1}}{Q_{2n}}$ enthalten sind. Die Annahme $\beta = 0$ führt auf die Formeln *a)* und *b)* zurück. Die Annahme $\gamma = \alpha$ aber liefert die jetzt gesuchten Formeln. Denn unter dieser Voraussetzung übergeht 1) in

$$\frac{\varphi(-n-\beta, 1-n-\alpha, 1-\alpha-2n, q, q^{\beta} x)}{\varphi(-n-\beta, -n-\alpha, -\alpha-2n, q, q^{\beta} x)},$$

welcher Quotient $= \frac{\varphi(-n, 1+\beta-\alpha-n, 1-\alpha-2n, q, x)}{\varphi(-n, \beta-\alpha-n, -\alpha-2n, q, x)}$ 2) ist, wovon man sich leicht dadurch überzeugt, dass beide Quotienten mittelst der in 58) angegebenen Transformation denselben Kettenbruch liefern. In 2) sind aber Zähler und Nenner ganze rationale Funktionen vom n^{ten} Grade mit dem absoluten Gliede 1, also ist der Zähler gleich Q_{2n-1} und der Nenner gleich Q_{2n}. **)

61) bis 73) Vermittelst der Identität

$$1 \cdot u_1 u_2 \ldots u_n = 1 + 1(u_1 - 1) + u_1(u_2 - 1) + u_1 u_2 (u_3 - 1) + \ldots + u_1 u_2 \ldots u_{n-1}(u_n - 1)$$

lässt sich das Produkt $\frac{d_1}{e_1} \frac{d_2}{e_2} \ldots \frac{d_n}{e_n}$ für beliebige n in die gleichgeltende Reihe $1 + \frac{d_1 - e_1}{e_1} + \frac{d_2 - e_2}{e_2} \cdot \frac{d_1}{e_1} + \ldots \frac{d_n - e_n}{e_n} \cdot \frac{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}}{e_1 e_2 \ldots e_{n-1}}$ verwandeln, welch letztere mittelst der Euler'schen Formel

$$A - B + C - D + E - F + \ldots = \left[\frac{A}{1}, \frac{B}{A-B}, \frac{AC}{B-C}, \frac{BD}{C-D}, \frac{CE}{D-E}, \ldots\right]$$

*) Siehe Aufgabe 9) in X.

**) Siehe die wiederholt erwähnte Abhandlung von Heine.